

Wozu Geometrie ?

Hellmuth Stachel, Technische Universität Wien



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

stachel@dmg.tuwien.ac.at — <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel>



Was ist Geometrie?

Es wird ein Plädoyer für die Geometrie,
jedoch . . .

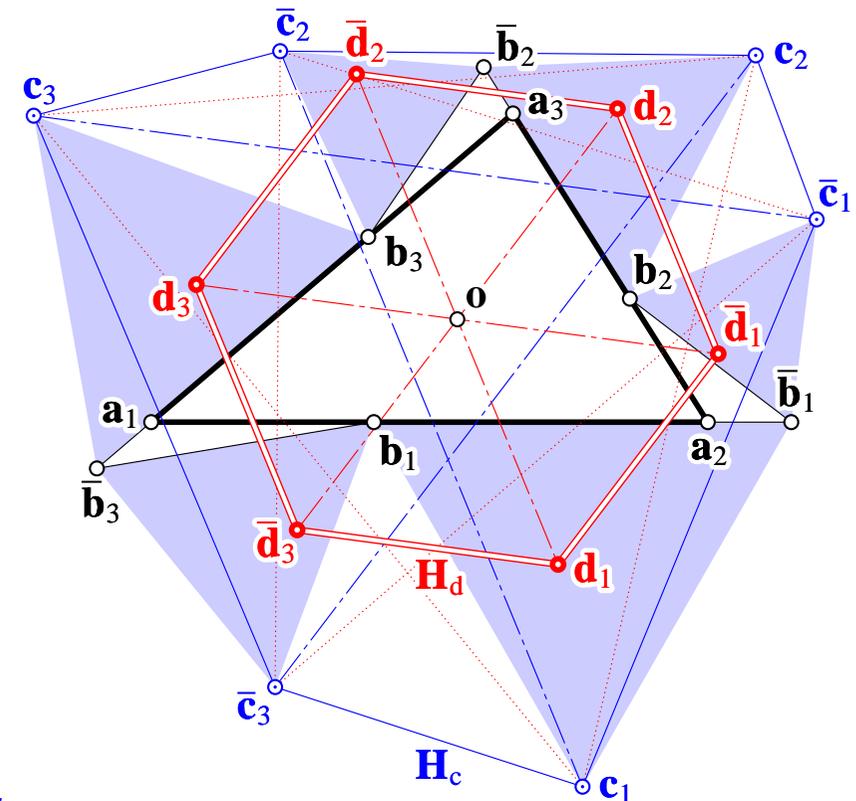
Was ist Geometrie?

Genauer:

Wo liegen die Grenzen der Geometrie
innerhalb der Mathematik?

Ist die Geometrie ein Teil der Mathematik?

“Geometrie ist das, was der Geometer macht!”



Verallgemeinerung eines Satzes von
NAPOLEON: FUKUTA's theorem



Was ist Geometrie?

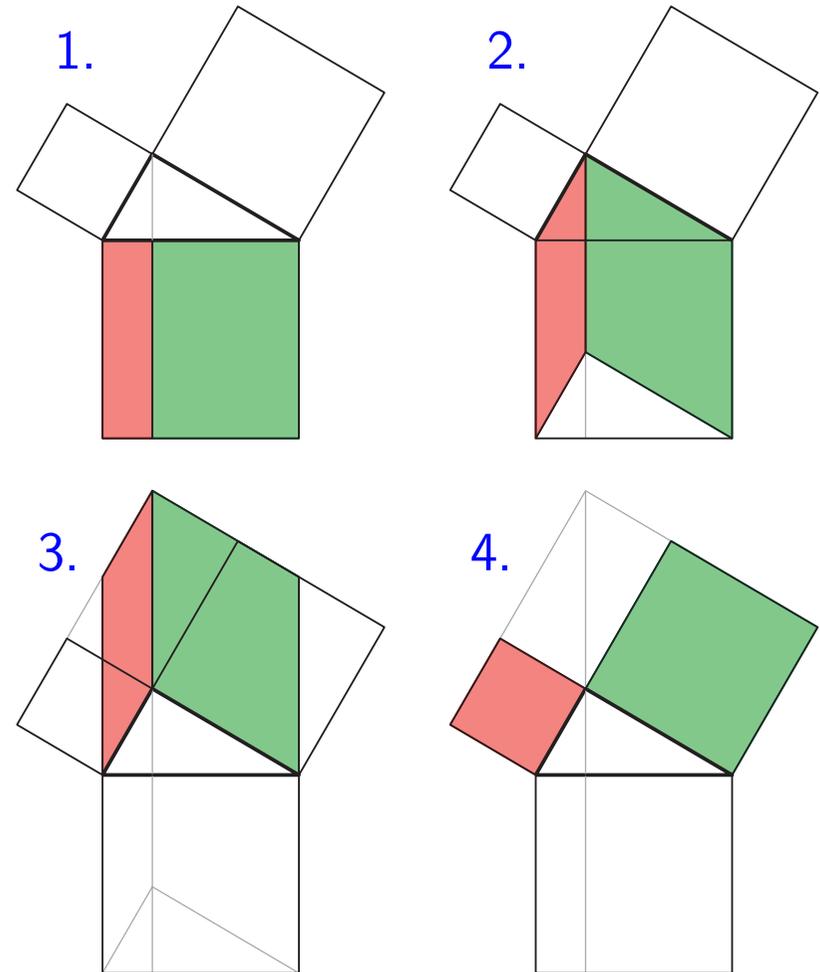
Geometrie hat etwas mit **Bildern** zu tun.

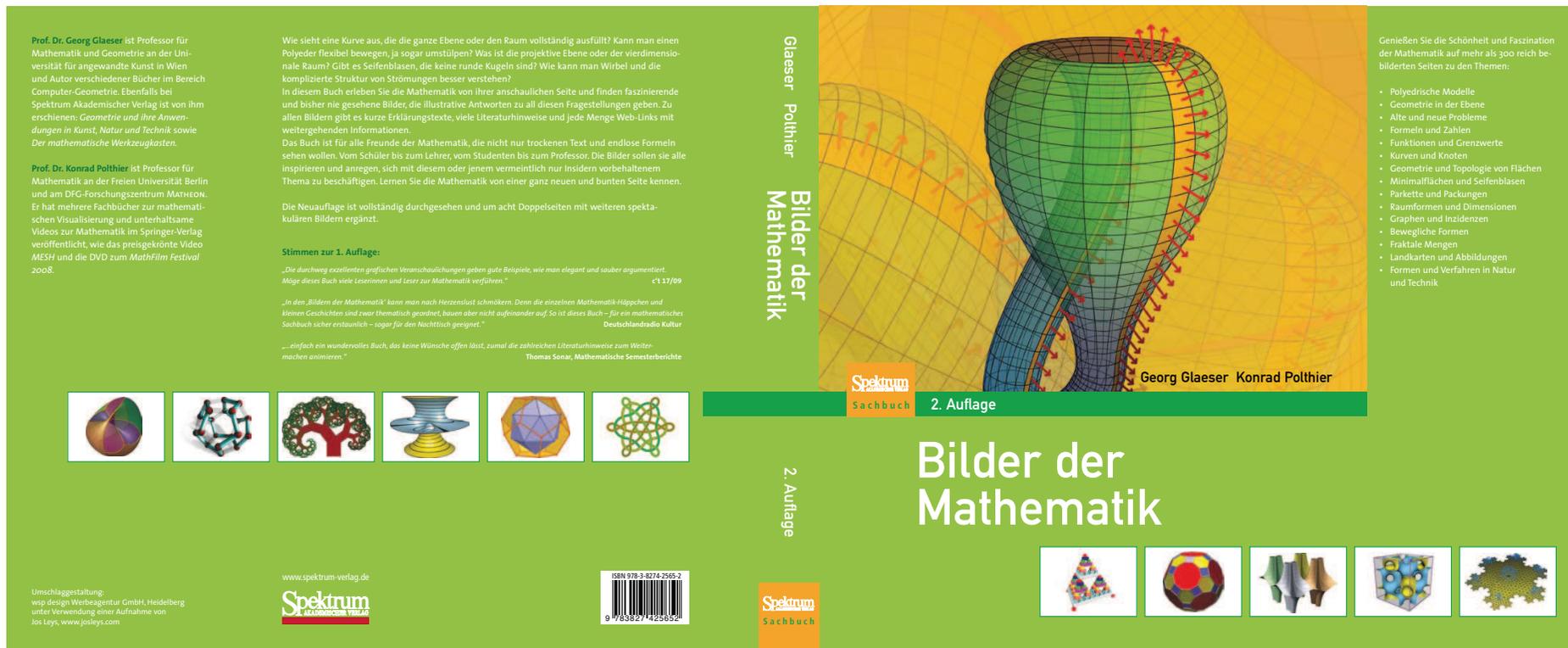
Aber Bilder illustrieren nur,

- sie **verdeutlichen** Aussagen oder mathematische Ideen,
- sie sind **Kontrolle**,
- sie **dokumentieren** gewisse Schritte innerhalb einer Herleitung.

Bilder ersetzen niemals einen **Beweis**. Dieser bedarf jedenfalls einer Abfolge streng logischer Schlüsse.

Rechts: *'Mathematical proofs in pictures'*





G. GLAESER, K. POLTHIER: *Bilder der Mathematik*.
 Spektrum, Akademischer Verlag, 2. Aufl., August 2010

Es ist eine Herausforderung (vor allem für Geometer), attraktive Illustrationen zu mathematischen Aussagen herzustellen, und auch dies erfordert Mathematik.



Geometrie und Bilder

Auch weniger professionelle Bilder können mathematische Aussagen vermitteln.

Max FRISCH (1911–1991):
Don Juan oder Die Liebe zur Geometrie
Komödie in fünf Akten



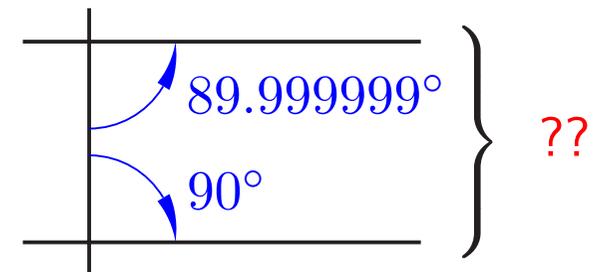
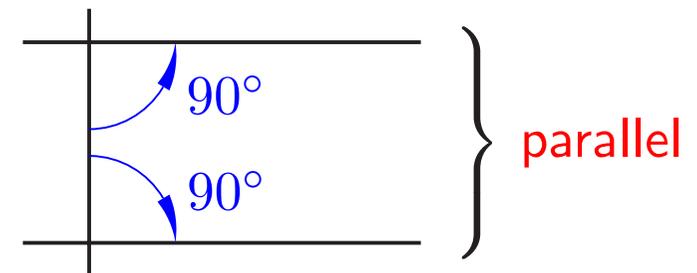
DON JUAN (zu DON RODERIGO): . . . Was ist feierlicher als zwei Striche im Sand, **zwei Parallelen**? Schau an den fernsten Horizont, und es ist nichts an Unendlichkeit; . . . und schau in die Milchstraße empor, es ist Raum, dass dir der Verstand dampft, unausdenkbar, aber es ist nicht das Unendliche, das sie allein dir zeigen: **zwei Striche im Sand, gelesen mit Geist**.

Geometrie, ein Kulturgut durch Jahrtausende

Geometrie spielt in “idealen Räumen”, die nichts mit unserem physikalischen Raum zu tun haben müssen.

Schon Euklid (ca. 365–300 v. Chr.) war bewusst, dass das Parallelenaxiom niemals experimentell nachweisbar ist.

Rund 2000 Jahre später bewies János BOLYAI (1802–1860), Offizier und Lehrer an der k.k. Militärakademie in Wien, dass es auch eine *nichteuklidische* Geometrie gibt, in welcher das Gegenteil zum Parallelenaxiom zutrifft.



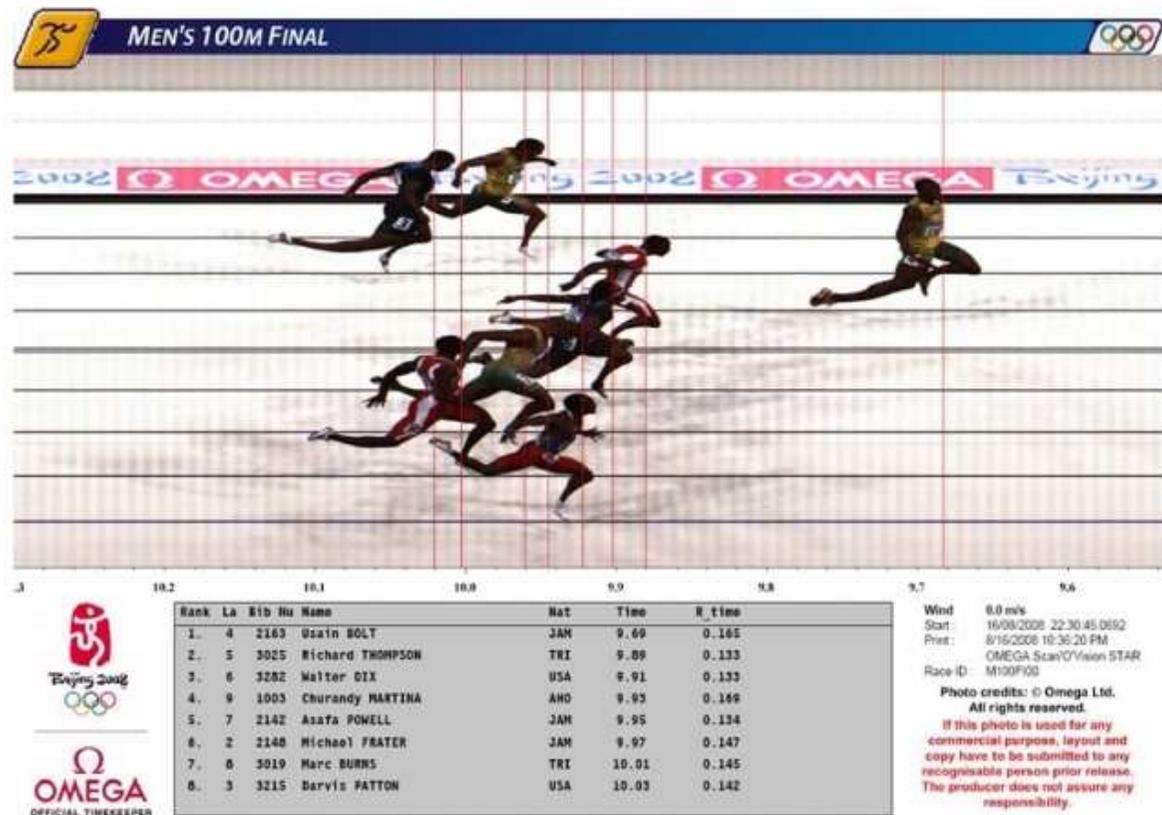
Bilder sind stets hilfreich

Geometrie beschäftigt sich mit Räumen verschiedenster Art und Dimension.

Bereits vor A. EINSTEIN war das geometrische Modell der **Raum-Zeit-Welt**, die *pseudoeuklidische* oder *Minkowski Geometrie* bekannt.

Es gibt auch Bilder der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt (x, y, z, t) . **Zielfotos** zeigen die $[xt]$ -Ebene.

Beim GPS werden Distanzen als Zeitunterschiede gemessen.

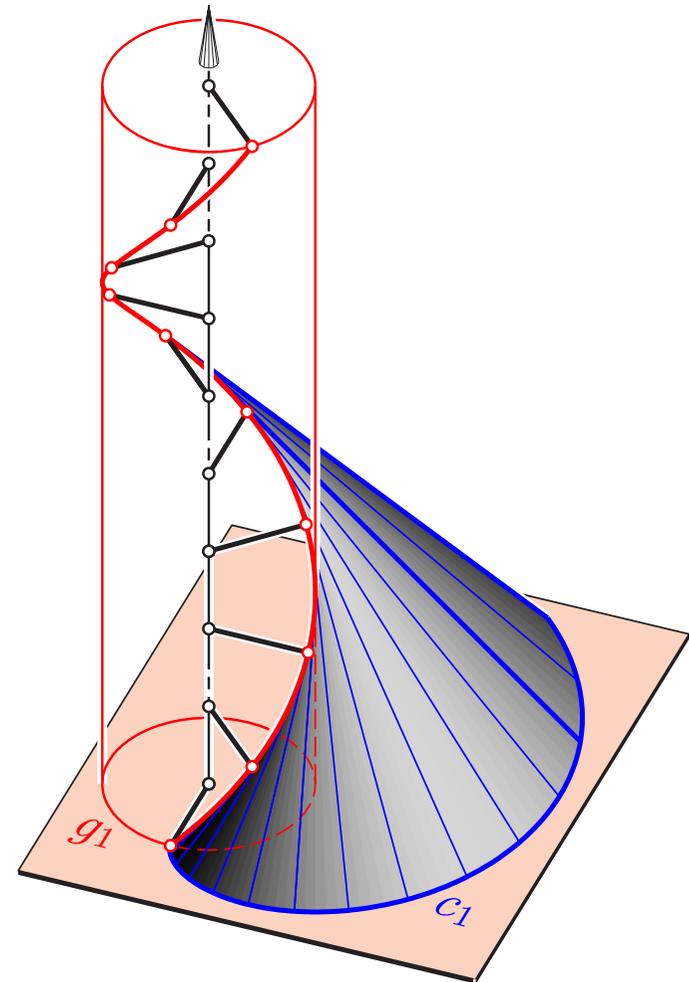


Was ist Geometrie?

Bill CASSELMAN: *Mathematical Illustrations*
A Manual of Geometry and PostScript
Cambridge University Press 2005

*In rendering **mathematics in images**, a person is forced to understand the essentials of an argument rather than to get lost in details.*

*The **magic of geometry** in mathematics, even at the most sophisticated level, is that geometrical concepts are somehow more visible than others.*



Was ist Geometrie?

Am besten ist eine Definition durch Aufzählung der Fachgebiete innerhalb der [2010 Mathematics Subject Classification](#) der American Mathematical Society

- 51 GEOMETRY
- 52 CONVEX AND DISCRETE GEOMETRY
- 53 DIFFERENTIAL GEOMETRY
- 14 ALGEBRAIC GEOMETRY
- 54 GENERAL TOPOLOGY
- 57 MANIFOLDS AND CELL COMPLEXES

Dazu kommt noch die Geometrie in Naturwissenschaften und Technik

L A
G E O M E T R I E .
LIVRE PREMIER.

*Des problemes qu'on peut construire sans
y employer que des cercles & des
lignes droites.*



Tous les Problemes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Division : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connus, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que je nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriefme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriefme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité



Geometrie und Schönheit



W. WUNDERLICH: *Geometrie und Schönheit*
Antrittsrede als Rector magnificus der Technischen
Hochschule in Wien, 1964:

. . . der Mathematiker kann bei gegebenem Anlass nicht umhin, **eine Theorie, eine Methode, eine Anwendung, einen Beweis als "schön"** zu bezeichnen, weil sie ihm aus dem Rahmen des Gewohnten hervorstechend erscheinen.

. . . beim Geometer kommt über die rein gedankliche Schönheit hinaus noch die **visuelle Schönheit** hinzu, also die sinnliche Freude bei der Betrachtung von materiellen oder vorgestellten Gebilden . . .

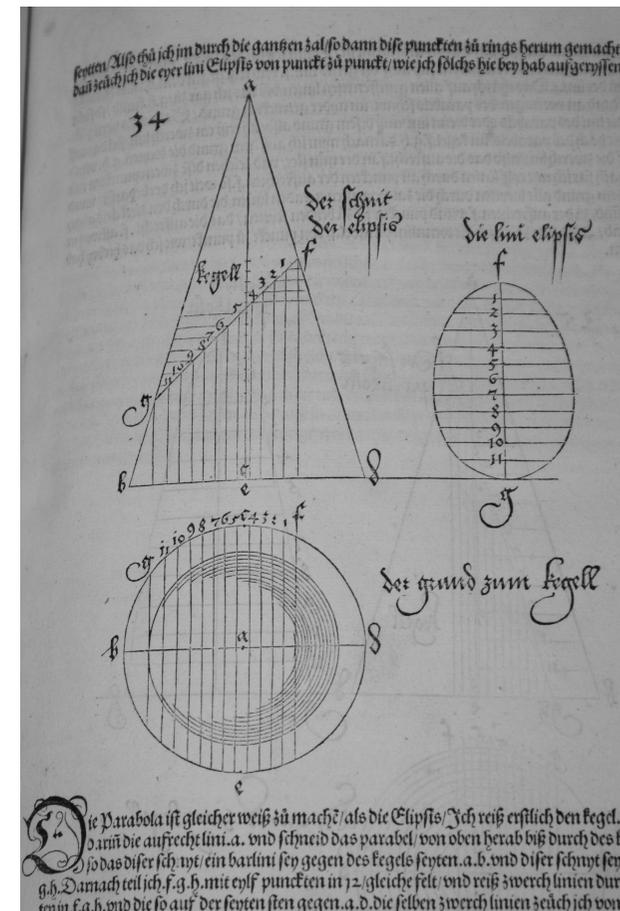
Links: Hôtel de ville, Paris

Geometrie als Grundlagenwissenschaft

Geometrie ist eine **Grundlagenwissenschaft**.
Das zeigt schon ihre historische Entwicklung.

Die Geometrie war die erste Wissenschaft mit einem streng deduktiven Aufbau. Auf der Basis von **Axiomen** wurde ein ganzes Gedankengebäude aufgebaut.

Die letzten Bausteine stammten von D. HILBERT (1862–1943), bevor K. GÖDEL (1906–1978) in seinem berühmten Unvollständigkeitssatz nachwies, dass immer wieder Fragen übrig bleiben, die auf der Basis des Axiomensystems nicht beantwortbar sind.

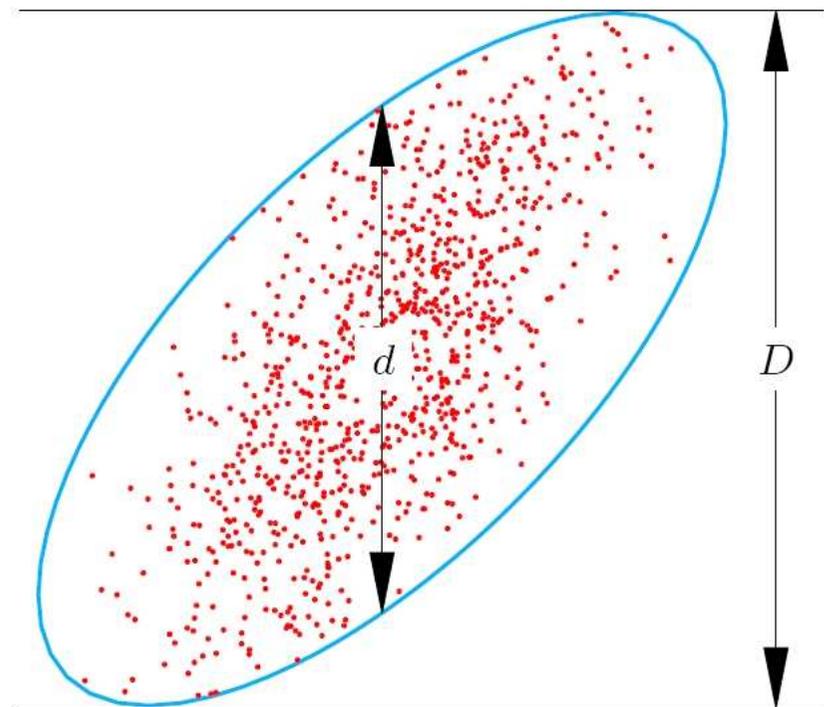


Geometrie und ihre Anwendungen

Die wichtigste Rolle der Geometrie innerhalb der Mathematik, in den Naturwissenschaften, Medizin und Technik ist es, **Modelle** anzubieten und dadurch **Visualisierungen** zu ermöglichen.

Dies zeigen die vielfältige Verwendung des Begriffes **Raum** (Funktionsraum, Farbraum) sowie die Wortkombination mit **-geometrie** (Zahngeometrie, Lenkgeometrie).

Geometrie steht oft auch als Pseudonym für **metrische Eigenschaften**, die Abmessungen irgendwelcher Objekte.



Konzentrationsellipse, Korrelationskoeffizient $r = \sqrt{1 - (d/D)^2}$

Bilder als Informationsträger

Bilder dominieren die Information.

Ohne Bilder könnten wir uns in arabischen oder ostasiatischen Ländern kaum zurecht finden.

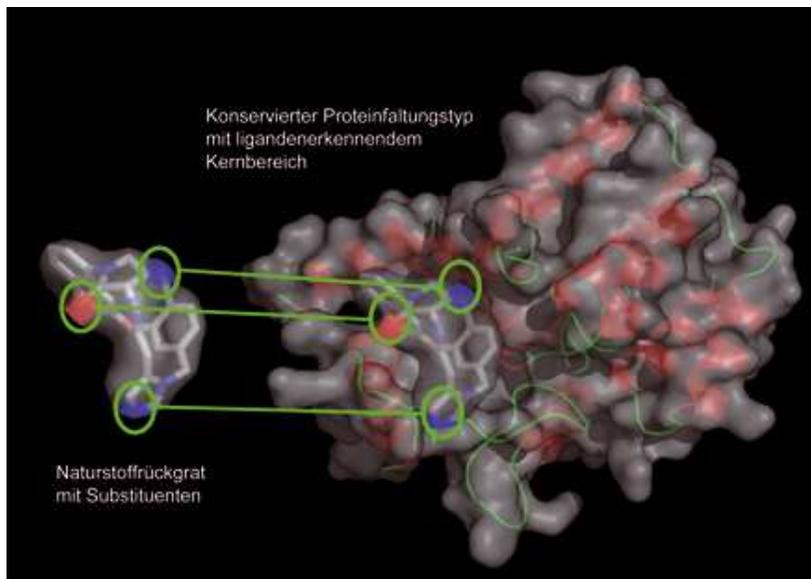


Daten jedweder Art (z.B. Statistiken) werden zumeist in Form von **Graphiken** präsentiert.

Medizin ohne **bildgebende Verfahren** ist heute undenkbar.

Die 'Geometrie' bestimmt gewisse Prozesse

Aus der **Molekularbiologie**:



Die Bindungen von Proteinmolekülen mit Liganden erfolgen bevorzugt an gewissen Nischen.

In der **Architektur** ist zumeist das äußere Erscheinungsbild entscheidend.



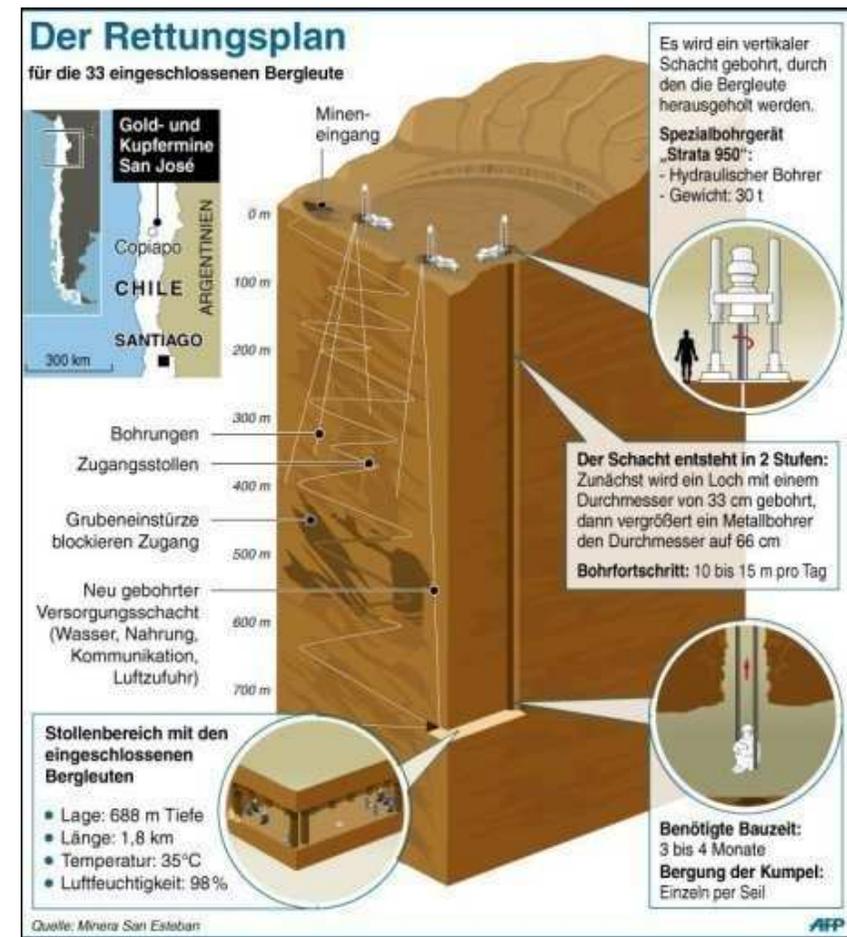
Guggenheim-Museum Bilbao

'Geometrie' heißt 'Erdmessung'

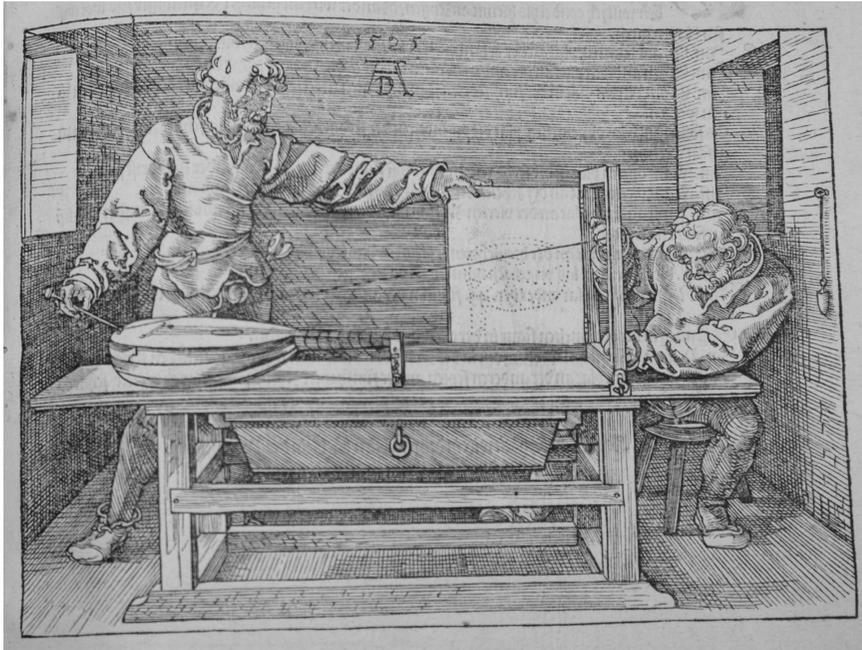
Geometrie im Wortsinn bedeutet 'Erdmessung'.

Diese Aufgabe ist inzwischen von der **Geodäsie** übernommen worden, die oft voll-elektronisch als 'remote sensing' (Fernerkundung) über Satelliten erfolgt und als GPS in jedem Auto oder Wanderrucksack Platz findet.

Ohne Geometrie (**Markscheidewesen**) hätte die Bergung der 33 Bergleute in Chile niemals stattfinden können.

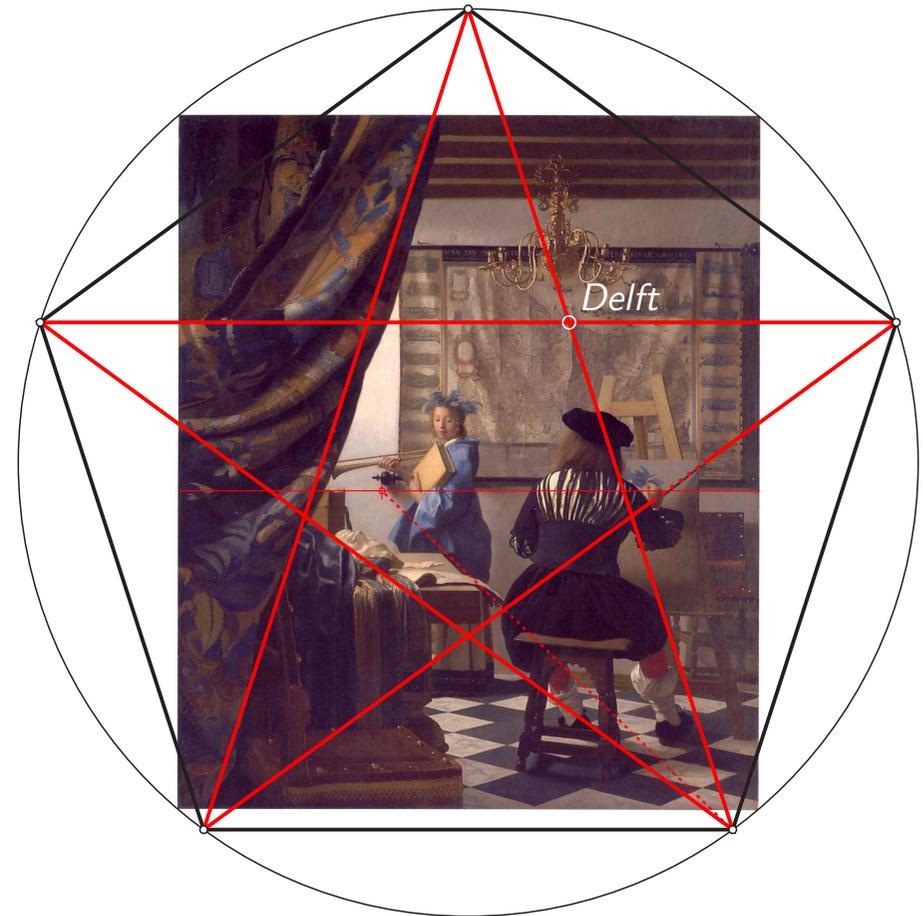


Geometrie und Kunst



Zwischen Geometrie und Kunst gibt es seit Jahrhunderten ein befruchtendes Wechselspiel

Rechts: Johannes Vermeer van Delft
De Schilderkunst [Die Malkunst]



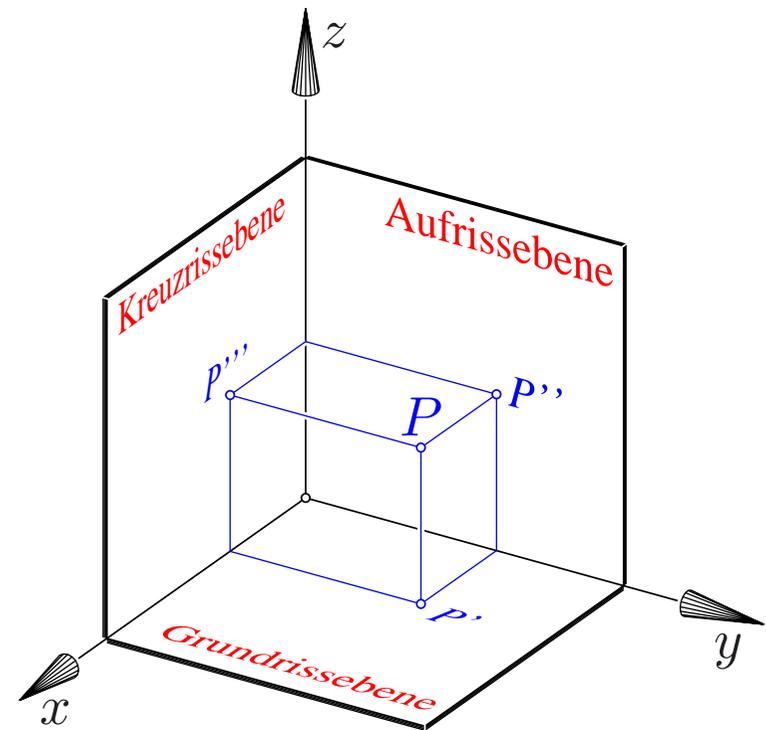
Die Rolle der Darstellenden Geometrie

Definition: Die Darstellende Geometrie ist eine Methode, um dreidimensionale Geometrie anhand von ebenen Bildern zu studieren.

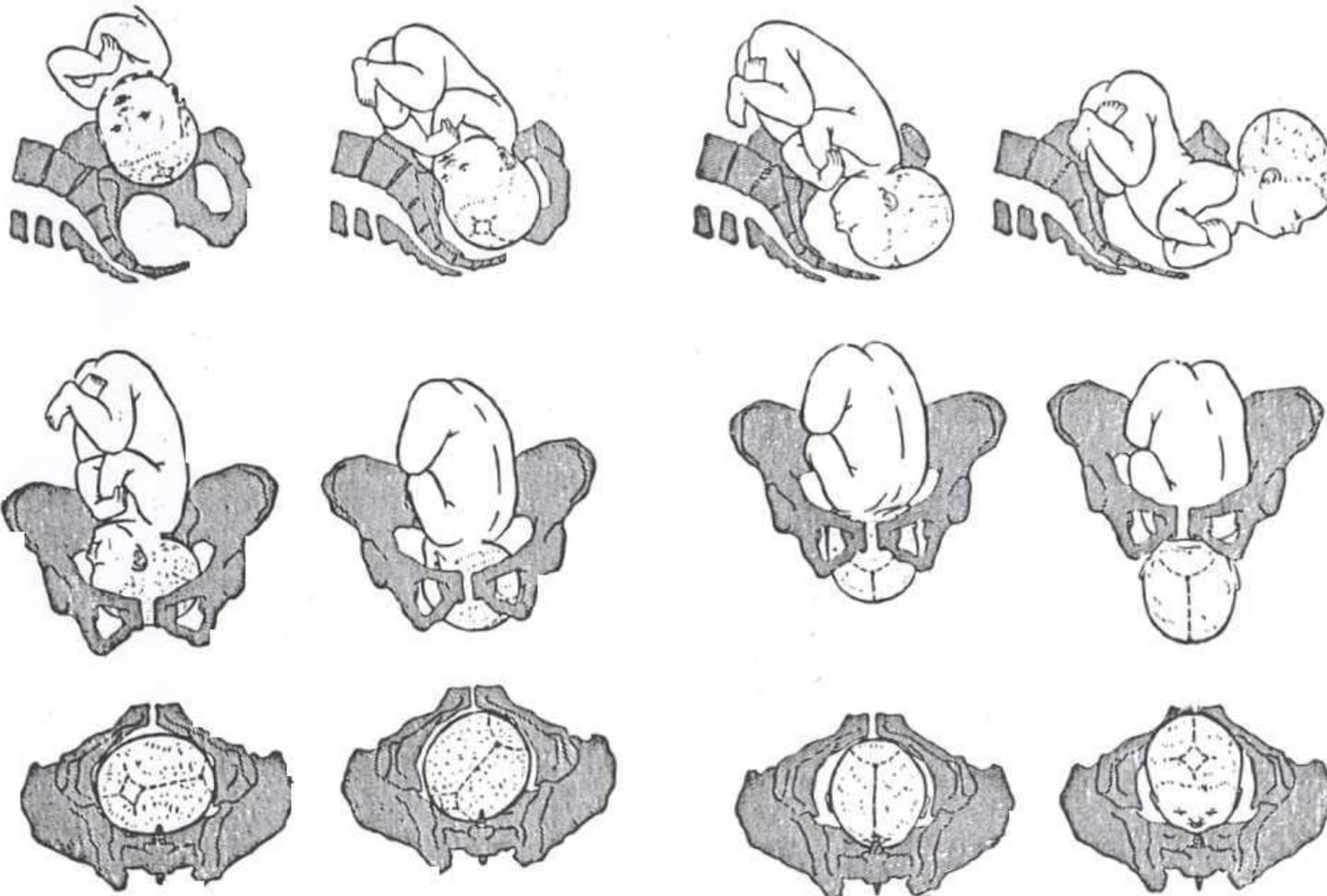
Sie ermöglicht einen Einblick in die Struktur und metrischen Eigenschaften von räumlichen Objekten, Prozessen und Prinzipien.

Typisch für die Darstellende Geometrie ist das Wechselspiel

- zwischen der Raumsituation und deren Darstellung,
- zwischen anschaulicher Interpretation und streng logischem Schließen.



Haupttrisse in der Gynäkologie



Kinematik, das Paradies der Geometer

Die Kinematik (Getriebelehre) in Dresden hat [Weltruhm](#) — ausgehend von L. Burmester, H. Alt, K. Kutzbach, W. Lichtenheldt, . . .

Neben aktuellen Gebieten wie [Robotik](#) und [Biomechanik](#) besteht in Industrie und Gewerbe nach wie vor Bedarf an neuen Mechanismen.

Im kommenden Jahr gibt es den große IFToMM 2011 World Congress in Guanajuato/México mit mehr als 1000 Teilnehmern



. . . und persönlich

Wozu Geometrie?

Weil sie ein Leben bereichern
und erfüllen kann.

