

# Vom Falten und Verebnen polyedrischer Figuren

Hellmuth Stachel

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie,  
Technische Universität Wien  
email: stachel@dmg.tuwien.ac.at

6. Februar 2009

## **Zusammenfassung**

Beim Verebnen denkt man als Geometer zumeist an das Netz eines Polyeders. Im Folgenden werden wir anstelle geschlossener Polyeder allgemeine polyedrische, also stückweise ebene Figuren abwickeln und umgekehrt falten. Dies führt zu einfachen raumgeometrischen Überlegungen, die durch Zeichnungen gestützt werden und in parametrische 3D-Modellierungsaufgaben münden.

Will man Fäden oder Bänder über Polyeder spannen, so kommt man ganz natürlich zu Geodätischen auf Polyedern. Diese teilen manche Eigenschaften mit den Geodätischen auf glatten Flächen, verhalten sich in anderer Hinsicht aber geradezu konträr. Auch hier regen einfache geometrische Überlegungen zu Zeichnungen oder 3D-Modellierungen an.

# 1 Ein Beispiel aus Japan

Eine kleine japanische Papierfigur ist der Anlass, die Erzeugung polyedrischer Raumfiguren durch Falten eines Schnittbogens zu analysieren. Fig. 1 zeigt einen japanische '3D-Smiley', der dem Verf. von Frau Prof. Emiko Tsutsumi aus Tokyo am Ende deren Gast-aufenthaltes in Wien als Souvenir überlassen worden ist. Dieser Smiley entsteht durch Falten der in Fig. 2 dargestellten Verebnung, in welcher die Doppellinien Schnitte, strichlierte Linien Täler und durchgezogene Linien Grate bedeuten.

Wir beherrschen vorstellungsmäßig den Vorgang des Faltens, sobald wir in der Lage sind, den gefalteten Smiley in Grund- und Aufriss darzustellen (Fig. 7). Dann wissen wir auch, wie wir beim 3D-Modellieren mit geeigneten Software vorzugehen haben.

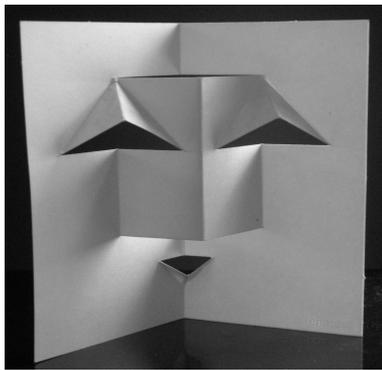


Abbildung 1: Ein japanischer 3D-Smiley

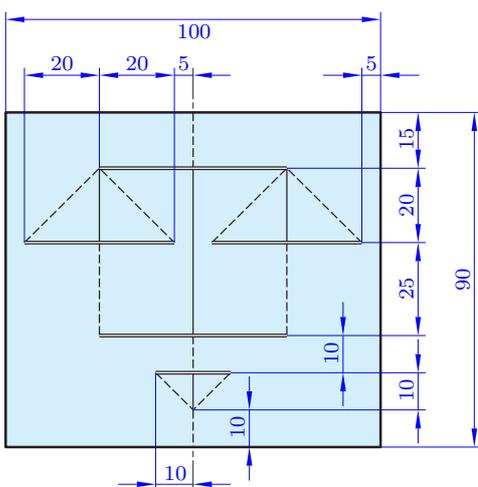


Abbildung 2: Abmessungen des Schnittbogens

Wir knicken die zunächst flache Figur entlang der Mittelachse durch den Biegewinkel  $\delta$ ,  $0^\circ < \delta \leq 180^\circ$ ,

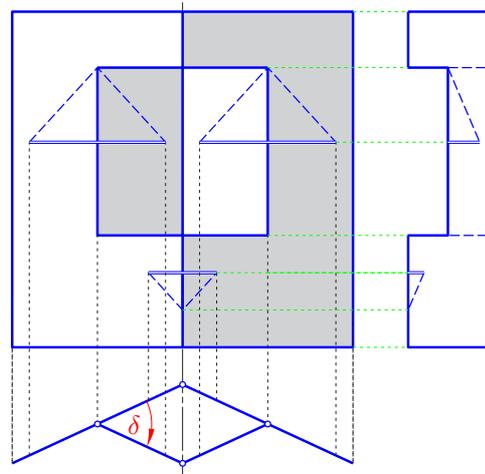


Abbildung 3: Noch sind Mund und Augen geschlossen

und wölben die 'Nase' nach vorne (Fig. 3).<sup>1</sup> Nun sind noch Augenlider und 'Unterlippe' nach vorne zu stülpen. Was passiert dabei? Wir spiegeln an der Ebene, welche durch die zwei strichliert eingezeichneten Kanten aufgespannt wird (Fig. 4). Der Winkel  $\psi$  zwischen diesen Kanten verkleinert sich beim Falten<sup>2</sup>. Bei der in Fig. 3 gewählten Aufstellung ist diese Spiegelungsebene im Kreuzriss projizierend (siehe Fig. 5).

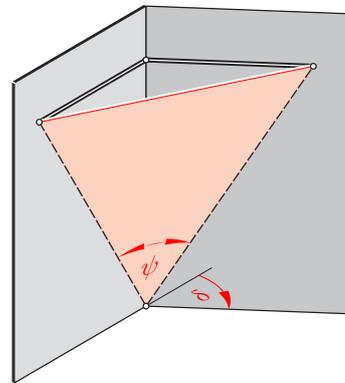


Abbildung 4: Wir identifizieren die Spiegelungsebene

Ein Vorstülpen ist deshalb möglich, weil sich aus der Verebnung zum gewählten Biegewinkel  $\delta$  mehr als eine Raumfigur bilden lässt. Das ist vergleichbar mit dem Verhalten eines Koppelgetriebes in der Durchschlaglage; hier verzweigt sich die Bewegung. Genau genommen besteht auch bei unserer Raumfigur nur in

<sup>1</sup>Dieser Biegewinkel  $\delta$  bietet sich für das parametrische Konstruieren als Parameter an. Er ist zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  zu variieren.

<sup>2</sup>In der Ausgangslage beträgt dieser Winkel  $90^\circ$ . Eine kleine Rechnung ergibt in Abhängigkeit vom Biegewinkel die Formel  $\cos \psi = \sin^2 \frac{\delta}{2}$ .

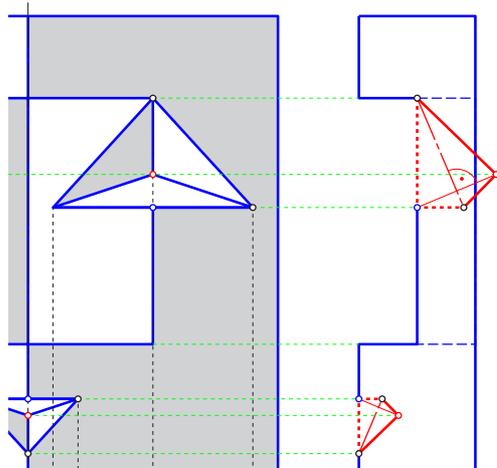


Abbildung 5: Jetzt wird gespiegelt

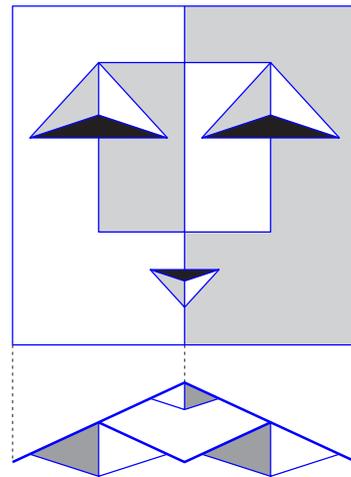


Abbildung 7: Das Ergebnis in Haupttrissen

der flachen Position die Möglichkeit der Verzweigung, aber weil der Karton etwas nachgibt, kann man mit etwas Kraft auch in der gefalteten Position die Augenlider und den Mund ‘durchdrücken’, also nach vorne stülpen.

Dass die beim Vorstülpen beteiligten Ebenen eigentlich doch nicht gespiegelt, sondern gedreht werden, wird deutlich, wenn wir auf der sichtbaren Seite einen Text aufbringen (Fig. 6). Dieser würde nach der Spiegelung auf der dem Betrachter abgewandten Seite erscheinen, und dort in Spiegelschrift. Dies ist bei der 3D-Modellierung zu beachten, wenn die zwei Seiten des Faltbogens mit verschiedenen Texturen versehen sind. Genaugenommen wird nur die Kante gespiegelt.

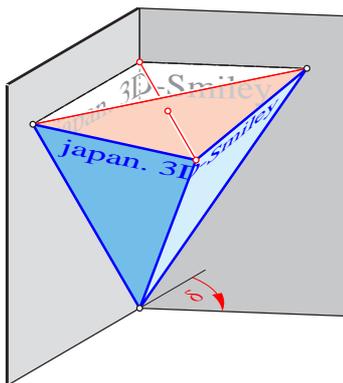


Abbildung 6: Der aufgeprägte Text zeigt, dass nur die Kante gespiegelt wird

## 2 Eine japanische Faltechnik

Nach Prof. Koryo MIURA, The Tokyo University, wird eine Art der Faltung bezeichnet, die z.B. bei Satelliten zum Zusammenlegen der Sonnenkollektoren verwendet wird. Denn damit lassen sich diese allein durch einfaches Auseinanderziehen vollständig öffnen. Kinetisch gesprochen erfolgt das Ausklappen nach einem einparametrischen Zwangslauf. Miura-Ori (d.h. die Faltung nach Miura) wird auch im Leichtbau bei der Sandwich-Bauweise eingesetzt als Kern zum Versteifen ebener Paneele — ähnlich zur Wellpappe.<sup>3</sup>

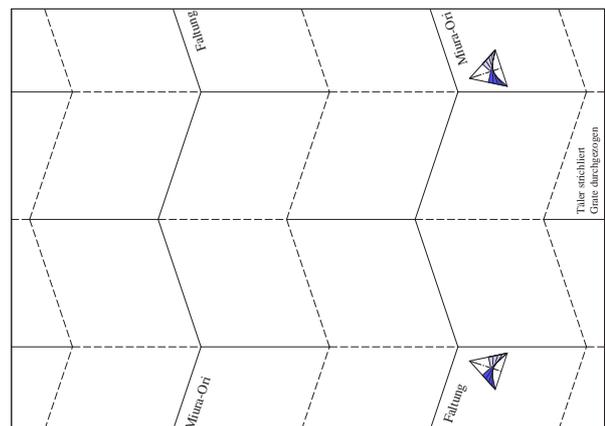


Abbildung 8: Ein Faltbogen für Miura-Ori mit strichlierten Tal- und durchgezogenen Gratlinien

Nun analysieren wir den Faltvorgang, d.h., wir klären, warum sich der in Fig. 8 gegebene Faltbogen tatsächlich stetig zur Gänze zusammenfalten lässt (vgl. die Figuren 11 und 12).

<sup>3</sup>Weitere Informationen unter <http://www.miura-pro.com>

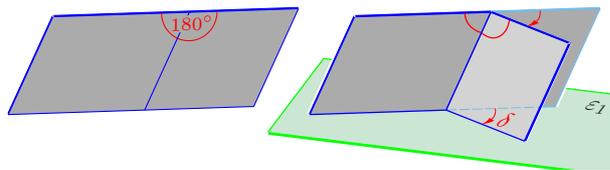


Abbildung 9: Wir verdrehen die zwei Parallelogramme gegeneinander

Wir beginnen mit zwei längs einer Kante zusammenhängenden Parallelogrammen (Fig. 9 links) und verdrehen das rechte Parallelogramm gegenüber dem linken unter dem Biegewinkel  $\delta$  bei  $-180^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$ . Es ist zu beachten, dass der Drehwinkel  $\delta$  verschieden ist von dem Winkel zwischen den Parallelogrammseiten, denn die Drehachse ist nicht dazu orthogonal!

Bei  $\delta \neq 0^\circ, \pm 180^\circ$  spannen die unteren Seiten eine Ebene  $\varepsilon_1$  auf, und die Verbindungsebene  $\varepsilon_2$  der oberen Kanten ist parallel dazu. Durch Parallelverschiebung entsteht aus den beiden Parallelogrammen ein ganzer Zickzack-Streifen, der zwischen den Parallelebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  Platz findet (Fig. 10 oben).

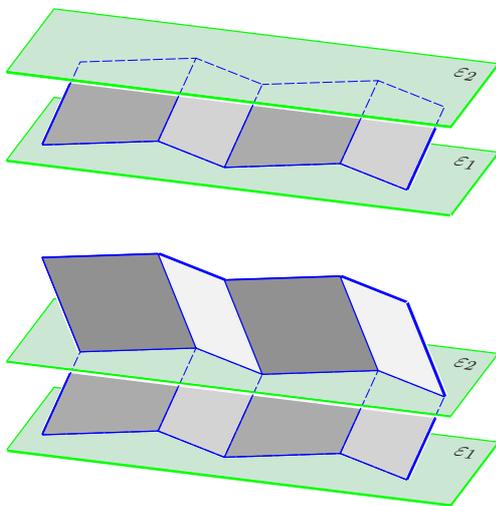


Abbildung 10: Die Faltung entsteht durch Translationen und Spiegelungen

Durch Spiegelung an der oberen Ebene  $\varepsilon_2$  entsteht ein zweiter Streifen, der lückenlos an den ersten anschließt und bei Änderung des Biegewinkels  $\delta$  die Bewegung des unteren Streifens mitmacht (Fig. 10 unten). Nun brauchen wir nur noch zu iterieren; alle weiteren Streifen entstehen aus den ersten beiden durch Translationen orthogonal zu den Parallelebenen.

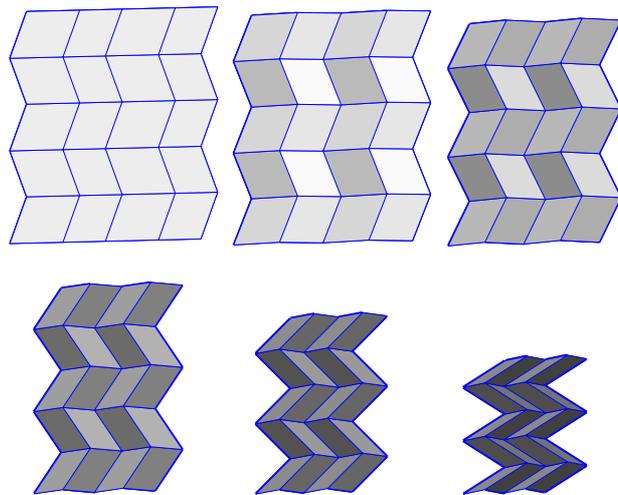


Abbildung 11: Der Faltvorgang frontal gesehen

Die Faltung des in Fig. 8 dargestellten Bogens kann wie folgt schrittweise erfolgen: Zuerst falten wir alle horizontalen Streifen hinter den untersten zickzack übereinander, so dass ein schmales Band übrig bleibt. Das knicken wir so wie in Fig. 10 oben. Dann belassen wir den untersten Streifen und stülpen den Rest nach oben (siehe Fig. 10 unten), indem wir wie oben beim Smiley im Sinne von Fig. 5 an  $\varepsilon_2$  spiegeln. Im nächsten Schritt wird der Rest hinter dem zweiten Streifen nach oben gestülpt, und so weiter. Alle diese Formen sind mögliche Raumpositionen des Faltbogens zum gewählten Biegewinkel  $\delta$ , und wieder ist ein stetiger Übergang ohne Verformung der ebenen Facetten, also die Verzweigung, nur über die flache Lage mit  $\delta = 0^\circ$  möglich.

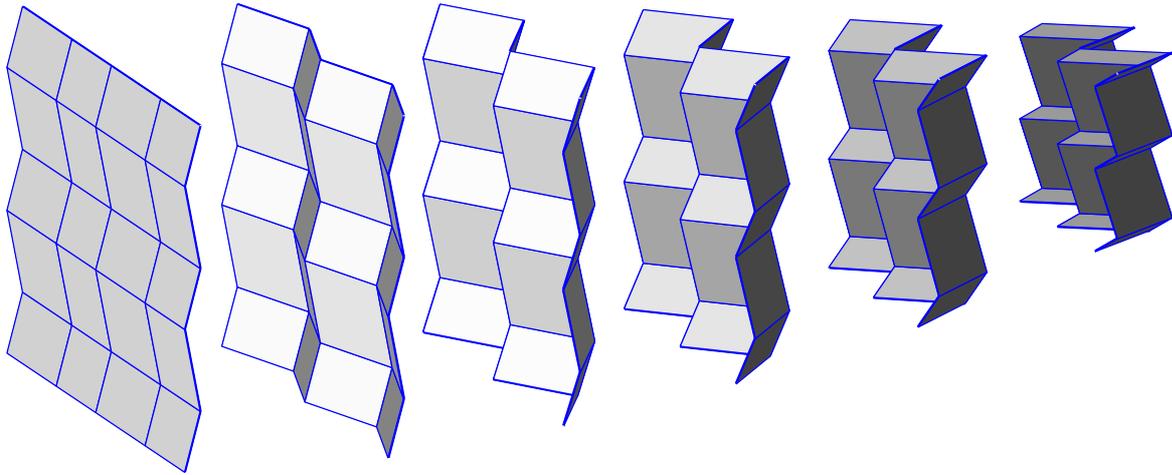


Abbildung 12: Zwischenlagen des Faltvorganges in seitliche Ansicht

### 3 Geodätische auf Polyedern

In dem folgenden Abschnitt geht es darum, Geraden aus der Verebnung beim Falten mitzunehmen. Damit entstehen Geodätische auf der polyedrischen Fläche. Wir beschränken uns in den Bildern 13–17 auf einen Würfel.

Dieser Abschnitt wurde angeregt durch das in den IBDG **26/1**, 33–34 besprochene Buch [1] von E.D. DEMAINE und J. O'ROURKE. Dort wird unter anderem bewiesen, dass jedes konvexe Polyeder eine einfach zusammenhängende und überlappungsfreie Verebnung hat, allerdings unter der Voraussetzung, dass man die Polyederfläche nicht nur längs der Kanten, sondern beliebig zerschneiden darf, bevor man alles in die Ebene ausbreitet.<sup>4</sup> Im Beweis wird das Polyeder durch die von einem Punkt ausstrahlenden Geodätischen zerschnitten und wie eine Orangenschale in die Ebene ausgebreitet (vgl. [1, Theorems 24.1.2, 24.1.3]).

Wir wenden uns hier aber nicht so tief liegenden Fragen zu, sondern möchten nur der Verlauf von Geodätischen auf Polyedern studieren. Diese Geodätischen zeigen ja zugleich, wie ein über das Polyeder gespannter Faden oder ein Band verläuft. Fig. 13 zeigt einige der von demselben Punkt startenden Geodätischen auf einem Würfel.

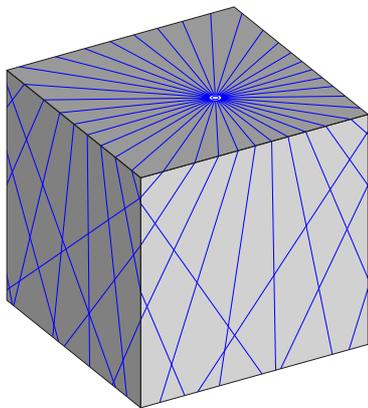


Abbildung 13: Ein Bündel von Geodätischen auf dem Würfel

Dabei stellt sich heraus, dass zu zwei Punkten  $P, Q$  der Polyederfläche mehrere geodätische Verbindungen existieren können. Bei dem in Fig. 14 gezeigten Beispiel gibt es sogar drei geodätische Verbindungen von  $P$  mit  $Q$  auf dem Würfel. Die von zwei derartigen Verbindungen gebildete Figur ist ein *geodätisches Zweieck*. Man erhält die verschiedenen

<sup>4</sup>Die Frage, ob jedes konvexe Polyeder eine kantentreue, einfach zusammenhängende und überlappungsfreie Verebnung besitzt, ist nach wie vor offen.

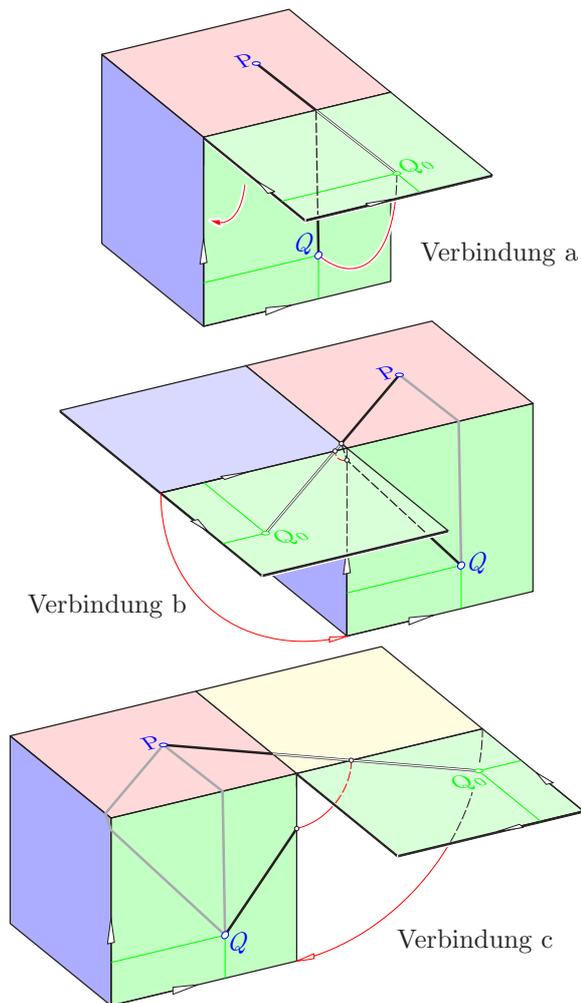


Abbildung 14: Verschiedene geodätische Verbindungen von  $P$  und  $Q$

Verbindungsbögen, indem man die  $Q$  enthaltende Seitenfläche auf verschiedene Arten in die  $P$  enthaltende Deckfläche dreht. Das mitgedrehte Achsenkreuz zeigt, dass diese Drehlagen in den Fällen b und c durch  $\pm 90^\circ$  gegenüber jener von Fall a verdreht sind.

Diese Drehwinkel sind die Basis für eine Begründung des auf Polyedern gültigen Satzes von Gauss-Bonnet:

*In einem von Geodätischen begrenzten Polygon auf dem Polyeder gilt bei Umlaufung im mathematisch positiven Sinn: Die Summe aus den Drehwinkeln in den Polygonecken und den Krümmungen der eingeschlossenen Polyederecken beträgt stets  $360^\circ$  bzw. im Bogenmaß  $2\pi$ .*

Dabei ist die Krümmung  $\kappa$  einer Polyederecke ein Maß für die ‘Spitzheit’ der Ecke; sie ist nämlich definiert als  $360^\circ$  minus der Summe der angrenzenden In-

nenwinkel und demnach gleich dem Defekt gegenüber einer ‘flachen Ecke’. Die Krümmung einer Würfecke beträgt z.B.  $90^\circ$ , jene der Ecken bei Miura-ori jeweils  $0^\circ$ , unabhängig vom Biegewinkel  $\delta$ . Analog zur Gauß’schen Flächenkrümmung ist die so definierte Eckenkrümmung eine Größe der ‘inneren’ Polyedergeometrie.

Die Gesamtkrümmung eines konvexen Polyeders, also die Summe aller Eckenkrümmungen, ist  $720^\circ$  bzw.  $4\pi$ . Man folgert dies, wenn man ein geodätisches Polygon auf zwei Arten durchläuft und die Werte addiert. Diese Formel, die auch aus der Euler’schen Polyedergleichung herleitbar ist, gilt für alle zur Kugel homöomorphen Polyeder.

Aus dem Satz von Gauss-Bonnet folgt für ein geodätisches  $n$ -Eck: Die Summe der Innenwinkel ist um die Summe der Krümmungen der eingeschlossenen Polyederecken größer als die Winkelsumme im ebenen Fall. Zum Beweis bezeichnen wir die Drehwinkel in dem geodätischen  $n$ -Eck mit  $\theta_1, \dots, \theta_n$  und die Krümmungen der eingeschlossenen Polyederecken mit  $\kappa_1, \dots, \kappa_e$ . Damit gilt für die Innenwinkel  $\alpha_i = \pi - \theta_i$

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) + \sum_{j=1}^e \kappa_j = 2\pi$$

und weiter

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n - 2)\pi + \sum_{j=1}^e \kappa_j.$$

So folgt für die Zweiecke in Fig. 15

$$\alpha + \beta = 180^\circ, \quad \alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$$

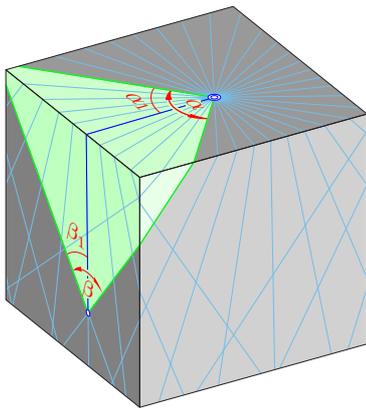


Abbildung 15: Aus dem Satz von Gauss-Bonnet folgt  $\alpha + \beta = 180^\circ$  sowie  $\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$

Die Fortsetzung eines geodätischen Bandes über eine Kante  $k$  hinweg (siehe Fig. 16) entsteht durch

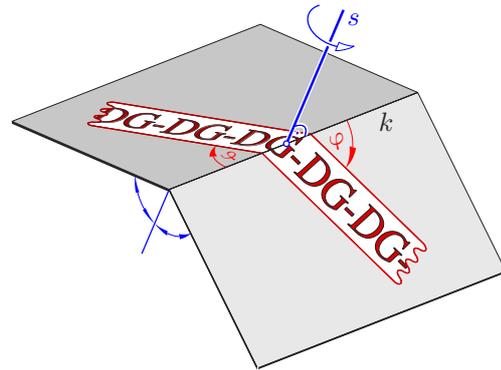


Abbildung 16: Der Verlauf eines aufgeklebten Bandes über eine Kante hinweg

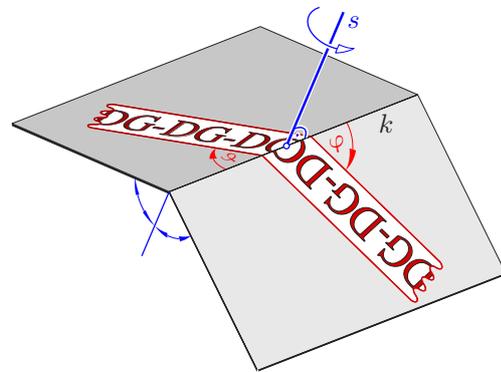


Abbildung 17: Die Halbdrehung um  $s$  ergibt denselben Bandverlauf, aber einen falschen Textaufdruck

Drehung um  $k$ , wobei kongruente Scheitelwinkel  $\varphi$  auftreten. Ähnlich zur obigen Spiegelung als Ersatz für das Umstülpen kann hier auch eine Geradenspiegelung benutzt werden, also die Drehung durch  $180^\circ$ , welche die zwei angrenzenden Halbebenen vertauscht. Die Achse  $s$  dieser Drehung liegt in der Symmetrieebene zwischen den Seitenflächen. Dieser Ersatz der Biegung durch eine Geradenspiegelung gilt aber wiederum nicht für den aufgeprägten Text, wie Fig. 17 im Vergleich zu Fig. 16 verdeutlicht.

## Literatur

- [1] E.D. DEMAINE, J. O’ROURKE: *Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.