

# Schraubtorsen als Zahnflanken

Hellmuth Stachel

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien

email: stachel@dmg.tuwien.ac.at

## Zusammenfassung

Es ist seit langem bekannt, dass Schrägzahnflanken über Stirnrädern mit Evolventenverzahnung von Schraubtorsen gebildet werden. Dass diese Flächen eine gleichförmige Bewegungsübertragung auch zwischen windschiefen Drehachsen ermöglichen, wurde erst in den letzten Jahren entdeckt und wird im Folgenden auf darstellend-geometrische Weise begründet.

## 1 Einleitung

Zahnradgetriebes haben die Aufgabe, Drehungen des Antriebsrades  $\Sigma_1$  (Achse  $p_{10}$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{10}$ ) auf jene des Abtriebsrades  $\Sigma_2$  (Achse  $p_{20}$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{20}$ ) zu übertragen, und zwar in der Regel *gleichförmig*<sup>1</sup>, also mit einem konstanten *Übersetzungsverhältnis*

$$i := \omega_{20}/\omega_{10} = \text{konst.} \quad (1)$$

Je nach Lage der Achsen zueinander unterscheiden wir

<i>Verzahnung</i>	<i>Achsen <math>p_{10}, p_{20}</math></i>	<i>Zahnräder</i>
ebene Verzahnung	parallel	Stirnräder
sphärische Verzahnung	schneidend	Kegelräder
räumliche Verzahnung	windschief	Hyperboloidräder (z.B. Schneckenräder bei $p_{10} \perp p_{20}$ )

Die weitaus häufigste Verzahnungsart für parallele Achsen ist die Evolventenverzahnung (Abb. 2). Dabei können die Zahnräder entweder als Zylinderflächen mit den Stirnrädern als Querschnitt gefertigt werden oder aber auch als *Schrägzahnflanken* in Form von Schraubflächen (Abb. 1). Die dabei entstehenden Flankenflächen sind bekanntlich Schraubtorsen, also die Tangentenflächen von Schraublinien (Abb. 3, vgl. etwa [1, 6]). Die Berührkurve zwischen zwei in

<sup>1</sup>Es gibt auch ungleichförmig übertragende Flankenpaare, doch bleiben diese hier außer Acht.

Eingriff stehenden Zahnflanken ist dabei geradlinig und die gemeinsame Tangentialebene längs dieser Berührstrecke konstant.

Nun hat der Australier Jack PHILLIPS kürzlich entdeckt und in seinem Buch [3] sehr ausführlich und reich illustriert dargestellt, dass Schraubtoren sogar noch bei zueinander windschiefen Drehachsen  $p_{10}, p_{20}$  als Flankenflächen für eine gleichförmige Bewegungsübertragung verwendbar sind. Dies ergibt dann allerdings eine *Punktverzahnung*, also mit einer in der Regel nur punktförmigen Berührung zwischen den Zahnflanken. Doch ist letzteres bei windschiefen  $p_{10}, p_{20}$  der Normalfall.



Abbildung 1: Schräg Zahnflanken zur Evolventenverzahnung

Diese *räumliche Evolventenverzahnung* hat folgende bemerkenswerte zusätzliche Eigenschaft: Das Übersetzungsverhältnis  $i$  hängt nur von den Abmessungen der beteiligten Schraubtoren ab, nicht aber von der relativen Lage der Drehachsen  $p_{10}, p_{20}$  zueinander. Diese Verzahnung ist also unempfindlich gegenüber Montagefehlern.

Im Folgenden wird diese neue Verzahnungsart kurz vorgestellt und begründet, wobei vorwiegend darstellend-geometrische Methoden benutzt werden und nur die Grundlagen der ebenen Kinematik vorausgesetzt werden. Gleichzeitig soll dies dazu anregen, im Unterricht aus Darstellender Geometrie derartige Zahnräder mit einer 3D-Modellierungssoftware zu entwerfen und das entstandene Zahnrädergetriebe dann auch noch zu animieren.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Ein Beitrag von W. RATH mit Tipps zur Modellierung mittels MicroStation ist für das kommende Heft geplant.

## 2 Kinematische Grundlagen

### 2.1 Ebene Verzahnungen

Für ebene Verzahnungen gilt bekanntlich (vgl. [1, 6])

**Satz 1 (Ebenes Verzahnungsgesetz)** Die Kurven  $c_1$  aus  $\Sigma_1$  und  $c_2$  aus  $\Sigma_2$  sind genau dann Zahnprofile für eine gleichförmige Bewegungsübertragung, wenn die Eingriffsnormale  $e$ , also die gemeinsame Normale im Berührungspunkt  $E$ , stets durch den Relativpol 12 geht. Dabei teilt 12 die Strecke zwischen den Radmitten 01, 02 im Verhältnis

$$\overline{12\ 01} : \overline{12\ 02} = \omega_{20} : \omega_{10} = i : 1.$$

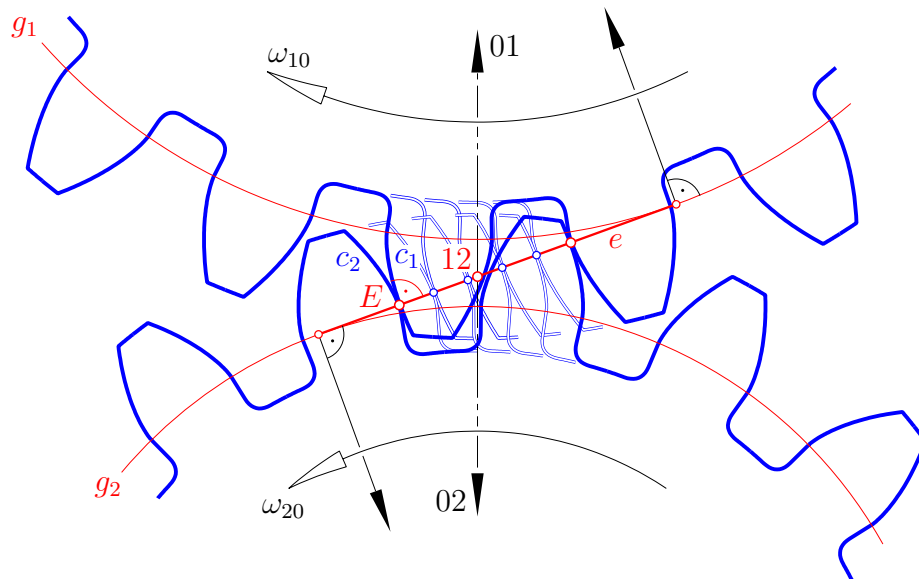


Abbildung 2: Evolventenverzahnung mit der konstanten Eingriffsnormalen  $e$

Die von L. EULER (1765) entwickelte (ebene) *Evolventenverzahnung* ist gekennzeichnet durch die Eigenschaft, dass alle Eingriffsnormalen  $e$  zusammenfallen (Abb. 2). Die Zahnprofile  $c_1, c_2$  sind Kreisevolventen. Diese ergeben bei Verschraubung um die jeweilige Drehachse Schraubtorsen. Dabei ist die Evolute  $g_j$  der Kreisevolvente  $c_j$  die Spurkurve des Drehzylinders durch die Gratlinie der jeweiligen Torse (Abb. 3). Nachdem von den Profilkurven nur spitzenfreie Bögen verwendbar sind, treten bei den Flankenflächen nur Bereiche außerhalb der Gratlinie auf, die damit zur Gänze auf nur einem Mantel der Torse liegen.

Die ebene Evolventenverzahnung weist gegenüber anderen ebenen Verzahnungsarten die folgenden Vorteile auf:

- (i) Bei konstantem  $\omega_{10}$  läuft der Eingriffspunkt  $E$  relativ zum Rastsystem  $\Sigma_0$  auf der konstanten Eingriffsnormalen  $e$  mit konstanter Geschwindigkeit.

- (ii) Die übertragende Kraft hat die konstante Wirkungslinie  $e$  und ist daher bei konstantem Antriebsmoment ebenfalls konstant.
- (iii) Das Übersetzungsverhältnis  $i = \omega_{20}/\omega_{10}$  ist unempfindlich gegenüber Montagefehlern.

Es wird sich herausstellen, dass alle diese Eigenschaften auch noch auf die räumliche Evolventenverzahnung zutreffen.

## 2.2 Räumliche Verzahnungen

Zunächst ein wichtiger Hilfssatz über räumliche Verzahnungen:

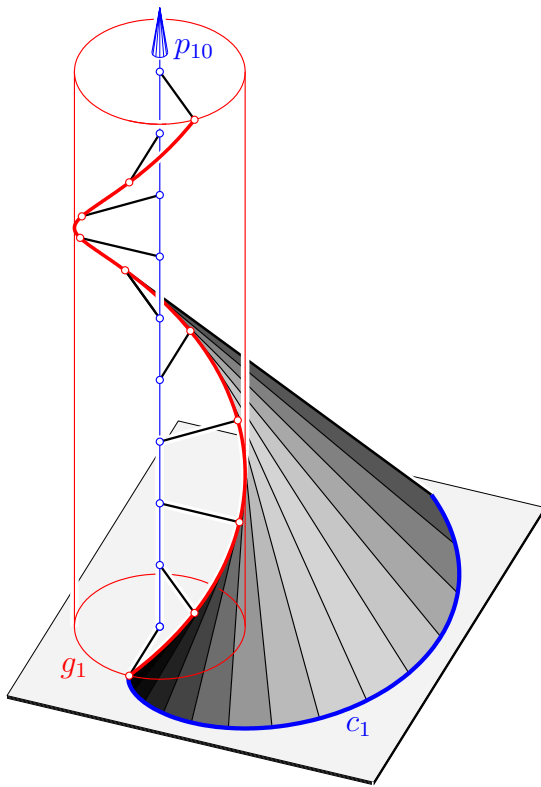


Abbildung 3: Schraubtorse als Tangentenfläche einer Schraublinie

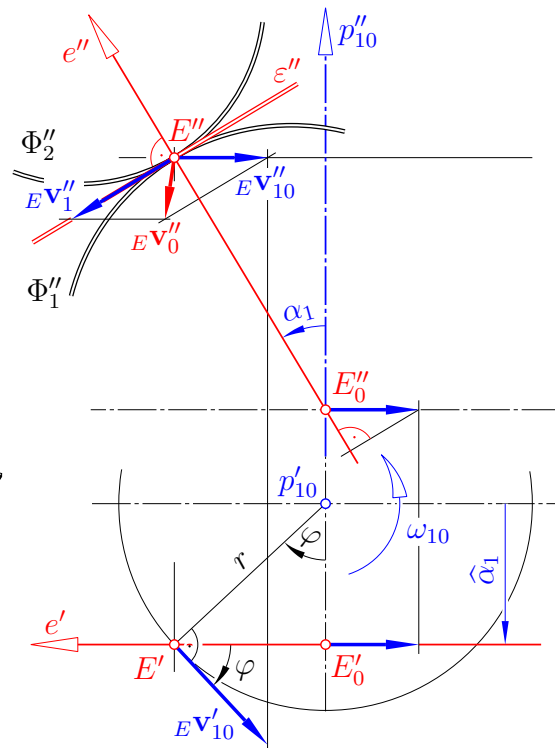


Abbildung 4: Beweis des Satzes 2

**Satz 2** Mittels der Flankenflächen  $\Phi_1$  aus  $\Sigma_1$  und  $\Phi_2$  aus  $\Sigma_2$  werde eine Drehung von  $\Sigma_1$  um  $p_{10}$  übertragen auf jene von  $\Sigma_2$  um  $p_{20}$ .

Dann legt ein einziger Berührungspunkt  $E$  zwischen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  bereits das augenblickliche Verhältnis  $i = \omega_{20}/\omega_{10}$  der Winkelgeschwindigkeiten fest. Dieses hängt

allerdings nur von der Eingriffsnormalen  $e$ , also der gemeinsamen Normalen der Flankenflächen im Eingriffspunkt  $E$  ab gemäß der Formel

$$i = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{\widehat{\alpha}_1 \sin \alpha_1}{\widehat{\alpha}_2 \sin \alpha_2}. \quad (2)$$

Dabei sind  $\widehat{\alpha}_j$  und  $\alpha_j$  orientierter Abstand bzw. Winkel<sup>3</sup> zwischen  $e$  und der Drehachse  $p_{j0}$  für  $j = 1, 2$ .

*Beweis:* Sei  ${}^E\mathbf{v}_0$  der augenblickliche Geschwindigkeitsvektor des Eingriffspunktes  $E$  gegenüber  $\Sigma_0$ . Dann ist diese Absolutgeschwindigkeit zusammengesetzt aus der Führungsgeschwindigkeit  ${}^E\mathbf{v}_{j0}$ , die  $E$  bei der Drehung des Rades  $\Sigma_j$  gegenüber  $\Sigma_0$  erfährt, und der Relativgeschwindigkeit  ${}^E\mathbf{v}_j$ , mit welcher  $E$  sich auf der jeweiligen Zahnflanke  $\Phi_j \in \Sigma_j$  verändert. Das führt zu

$${}^E\mathbf{v}_0 = {}^E\mathbf{v}_{10} + {}^E\mathbf{v}_1 = {}^E\mathbf{v}_{20} + {}^E\mathbf{v}_2, \quad (3)$$

Nachdem  ${}^E\mathbf{v}_1$  und  ${}^E\mathbf{v}_2$  parallel zur gemeinsamen Berührebene  $\varepsilon$  sind, müssen die in der Richtung von  $e$  verlaufenden Komponenten von  ${}^E\mathbf{v}_{10}$  und  ${}^E\mathbf{v}_{20}$  übereinstimmen.

Zur Feststellung der Größe dieser Komponenten betrachten wir zunächst das erste Rad und wählen  $p_{10}$  und  $e$  parallel zur Aufrissebene (siehe Abb. 4): Ist der von der Drehung um  $p_{10}$  stammende Geschwindigkeitsvektor  ${}^E\mathbf{v}_{10}$  unter dem Winkel  $\varphi$  gegenüber der Aufrissebene geneigt, so erhalten wir als Länge des Aufrisses  ${}^E\mathbf{v}_{10}''$

$$r\omega_{10} \cos \varphi = (r \cos \varphi)\omega_{10} = \widehat{\alpha}_1\omega_{10}, \quad (4)$$

wobei  $r = \overline{Ep_{10}}$  ist. Wir erkennen, dass diese Aufrisslänge für alle Punkte von  $e$  gleich ist. Ihre Komponente in Richtung der gewählten Orientierung von  $e$  beträgt  $-\omega_{10}\widehat{\alpha}_1 \sin \alpha_1$ , was mit (3) zur Gleichung

$$-\omega_{10}\widehat{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = -\omega_{20}\widehat{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \quad (5)$$

führt und nach einer einfachen Umformung weiter zu (2).  $\square$

**Korollar 3 (Räumliches Verzahnungsgesetz)** Die Flächen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  sind genau dann Zahnflanken für eine gleichförmige Bewegungsübertragung von  $\Sigma_1$  auf  $\Sigma_2$ , wenn die Eingriffsnormalen  $e$  in allen Berührungspunkten  $E$  die Gleichung (2) erfüllen, wobei  $\widehat{\alpha}_j$  und  $\alpha_j$  für  $j = 1, 2$  den orientierten Abstand bzw. Winkel zwischen  $e$  und der Drehachse  $p_{j0}$  bezeichnen (siehe Abb. 5).

<sup>3</sup>Um Abstand und Winkel vorzeichenbehaftet angeben zu können, muß neben den Orientierungen der Drehachsen  $p_{10}, p_{20}$  auch noch eine der Eingriffsnormalen  $e$  willkürlich festgesetzt werden.

*Bemerkung:* Die Gleichung (2) definiert einen linearen Geradenkomplex, den *Normalenkomplex der Relativbewegung*  $\Sigma_2/\Sigma_1$ . Stellt man die Drehachsen  $p_{10}, p_{20}$ , die orientierte Eingriffsnormale  $e$  und die Momentanschraube von  $\Sigma_2/\Sigma_1$  durch duale Vektoren  $\underline{p}_{10}, \underline{p}_{20}, \underline{e}$  bzw.  $\underline{q}_{21}$  dar (siehe z.B. [2, 4]), so folgt (2) unmittelbar aus der Gleichung des Normalenkomplexes

$$\underline{q}_{21} \cdot \underline{e} = (\omega_{20} \underline{p}_{20} - \omega_{10} \underline{p}_{10}) \cdot \underline{e} \in \mathbb{R} \iff \omega_{20} \hat{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - \omega_{10} \hat{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = 0.$$

### 3 Räumliche Evolventenverzahnung

Die räumliche Evolventenverzahnung wird nach J. PHILLIPS [3] definiert durch die Eigenschaft, dass jeder Eingriffspunkte  $E$  gegenüber  $\Sigma_0$  auf einer konstanten Eingriffsnormalen  $e$  verbleibt. Dabei muß nur vorausgesetzt werden, dass  $e$  keine der Drehachsen  $p_{10}$  oder  $p_{20}$  schneidet und auch zu keiner orthogonal ist.

Die Konstanz von  $e$  garantiert nach Satz 2 bereits ein konstantes Übersetzungsverhältnis. In den verschiedenen Positionen des Eingriffspunktes  $E \in e$  sind die gemeinsamen Tangentialebenen  $\varepsilon$  an die Flankenflächen  $\Phi_1, \Phi_2$  stets orthogonal zu  $e$ . Wie sehen mögliche Flankenflächen überhaupt, welche Kurven durchläuft  $E$  auf den Flächenflächen?

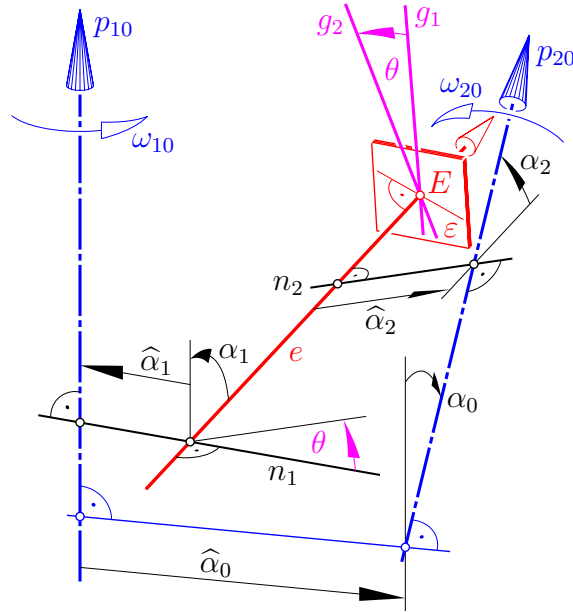


Abbildung 5: Die Lage der Eingriffsnormalen  $e$  zu den Radachsen  $p_{10}, p_{20}$

#### 3.1 Relativbahnen des Eingriffspunktes

Um festzustellen, welche Bahn  $s_1$  der Eingriffspunkt  $E$  relativ zu  $\Sigma_1$  auf  $\Phi_1$  beschreibt, beachten wir:  $\Sigma_1/\Sigma_0$  ist eine Drehung um  $p_{10}$ , und relativ zu  $\Sigma_0$  läuft

$E$  auf  $e$ . Somit liegt die Relativbahn  $s_1$  auf dem *einschaligen Drehhyperboloid*  $\Pi_1$  durch  $e$  mit der Achse  $p_{10}$ .

Nachdem der Eingriffspunkt  $E$  stets auf der Flankenfläche  $\Phi_1$  liegen muß, deren Tangentialebene  $\varepsilon$  in  $E$  zu  $e$  normal ist, ist die Tangente an  $s_1$  in  $E$  orthogonal zu  $e$  (vgl. Abb. 5). Die gesuchte Relativbahn  $s_1$  ist somit eine *orthogonale Trajektorie einer Erzeugendenschar* des Drehhyperboloids  $\Pi_1$  (Abbn. 6 und 7).

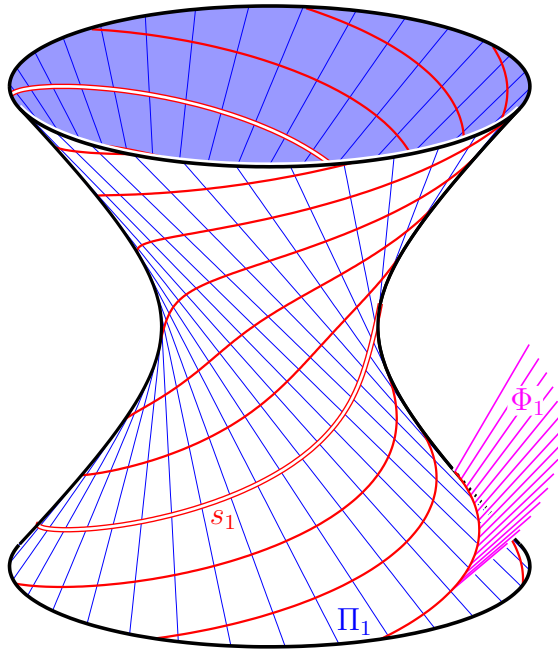


Abbildung 6: Relativbahn  $s_1$  als Orthogonaltrajektorie einer Erzeugendenschar des Drehhyperboloids  $\Pi_1$  samt Teil der längs  $s_1$  orthogonal durchsetzenden Schraubtorse  $\Phi_1$

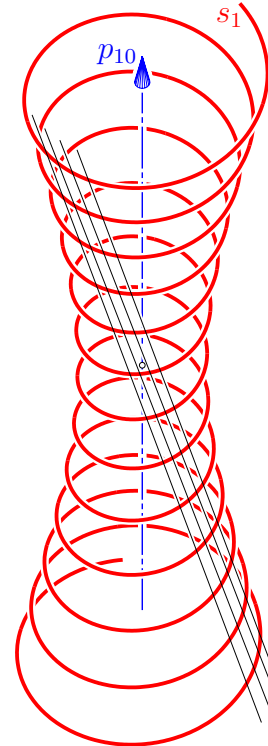


Abbildung 7: Relativbahn  $s_1$  ('Bettfedernkurve')

### 3.2 Flankenflächen der Evolventenverzahnung

Die einfachste Zahnflanke  $\Phi_1$  entsteht als Hüllfläche der Eingriffsebenen  $\varepsilon$ , während  $E$  eine Relativbahn durchläuft.<sup>4</sup> Dass dies eine *Schraubtorse* ist, welche das Drehhyperboloid  $\Pi_1$  längs  $s_1$  orthogonal durchsetzt, läßt sich wie folgt zu begründen (siehe Abb. 8):

Wenn wir das Rad  $\Phi_1$  mit der konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{10}$  drehen und  $E$  gleichzeitig derart auf  $s_1$  laufen lassen, dass  $E$  gegenüber  $\Sigma_0$  auf  $e$  verbleibt, so bewegt sich  $E$  längs  $e$  mit der (im Sinne von  $e$  orientierten) Geschwindigkeit (vgl. (5))

$${}^E v_{0|1} = -\omega_{10} \hat{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = \text{konst.} \quad (6)$$

<sup>4</sup>Bei einer Punktverzahnung ist 'theoretisch' nur der Flächenstreifen längs  $s_1$  wesentlich.

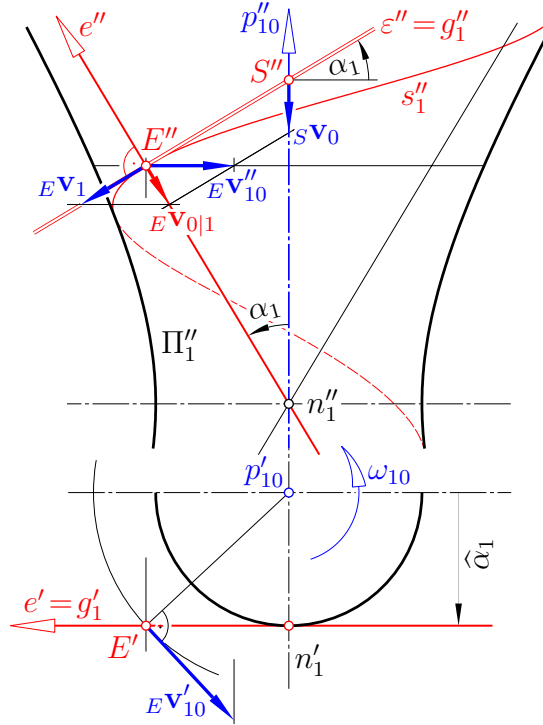


Abbildung 8: Geschwindigkeiten von  $E$  und  $S$

Aus deren Konstanz folgt, dass sich auch die durch  $E$  gehende Eingriffsebene  $\varepsilon$  gegenüber  $\Sigma_0$  mit konstanter Geschwindigkeit längs  $e$  verschiebt. Demnach hat auch ihr Schnittpunkt  $S$  mit der Achse  $p_{10}$  eine konstante Geschwindigkeit. Diese lautet im Sinne der Orientierung von  $p_{10}$  (siehe Abb. 8;  $e$  und  $p_{10}$  liegen wieder aufrissparallel)

$$s^v_0 = -\omega_{10} \hat{\alpha}_1 \tan \alpha_1. \quad (7)$$

Nun zur Bewegung von  $\varepsilon$  gegenüber  $\Sigma_1$ : Die Eingriffsebene  $\varepsilon$  dreht sich um  $p_{10}$  mit  $-\omega_{10}$ , während sie sich gleichzeitig längs  $p_{10}$  mit der Geschwindigkeit  $s^v_0$  verschiebt. Die Hüllfläche  $\Phi_1$  ist somit eine *Schraubtorse* (siehe Abb. 9) mit dem Radius  $r_1 = \hat{\alpha}_1$  und dem Schraubparameter

$$h_1 = \frac{s^v_0}{-\omega_{10}} = \hat{\alpha}_1 \tan \alpha_1. \quad (8)$$

$\Phi_1$  ist durch  $e$  bis auf Verschiebungen längs  $p_{10}$  oder Drehungen um  $p_{10}$  bestimmt.

### 3.3 Koordinatendarstellung der Relativbahnen

Wählt man ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Koordinatenebene  $z = 0$  den Kehlkreis des Hyperboloids  $\Pi_1$  enthält, so lässt sich die durch den Punkt



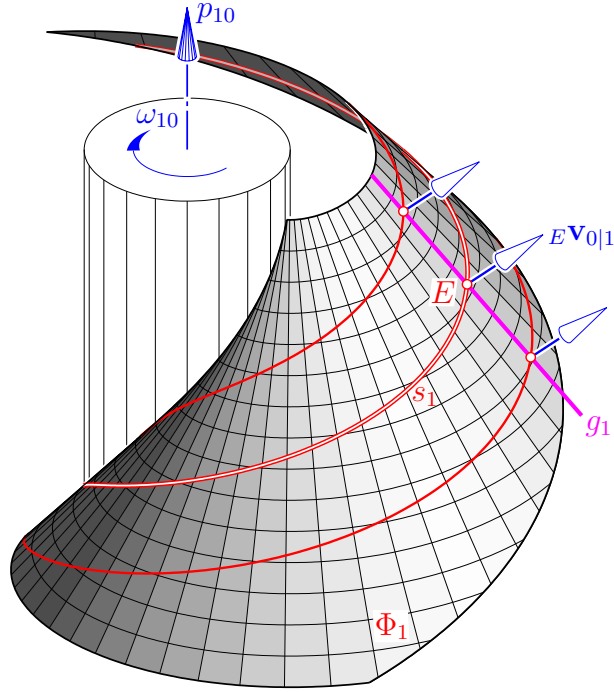


Abbildung 9: Schraubtorse  $\Phi_1$  mit Relativbahnen  $s_1$

$(\hat{\alpha}_1, 0, 0)$  gehende Relativbahn wie folgt parametrisieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \hat{\alpha}_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\alpha}_1 t \sin \alpha_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \sin t \\ -\sin \alpha_1 \cos t \\ \cos \alpha_1 \end{pmatrix} = \\ &= \hat{\alpha}_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \tan \alpha_1 \end{pmatrix} - \hat{\alpha}_1 t \sin^2 \alpha_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \tan \alpha_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $t$  als Zeit gewählt und  $\omega_{10} = 1$ . Die erste Darstellung bezieht sich auf  $s_1$  als Flächenkurve des einschaligen Drehhyperboloids  $\Pi_1$ . In der zweiten Zeile wird  $s_1$  als Flächenkurve der Schraubtorse  $\Phi_1$  gezeigt (vgl. Abb. 6).

## 4 Hauptsätze

**Satz 4 (Erster Hauptsatz)** *Schraubtorse  $\Phi_1, \Phi_2$  mit den Achsen  $p_{10}$  bzw.  $p_{20}$  und mit der konstanten Eingriffsnormalen  $e$  als Flächennormale sind passende Zahnflanken für eine räumliche Evolventenverzahnung mit Punktberührung.*

**Satz 5 (Zweiter Hauptsatz)** *Werden zwei Schraubtorse  $\Phi_1, \Phi_2$  derart positioniert, dass sie einander in einem Punkt  $E$  berühren, und werden ihre Achsen*

$p_{10}, p_{20}$  nun fixiert, so sind  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  passende Zahnflanken für ein konstantes Übersetzungsverhältnis, gleichgültig, ob die Achsen parallel, schneidend oder windschief sind. Das Übersetzungsverhältnis genügt der Gleichung

$$i = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{r_1 \sin \alpha_1}{r_2 \sin \alpha_2}$$

mit  $r_j$  als Radius des Gratzylinders und  $h_j = r_j \tan \alpha_j$  als Schraubparameter von  $\Phi_j$  für  $j = 1, 2$ . Das Übersetzungsverhältnis ist somit unabhängig von der relativen Lage der Radachsen.

*Beweis:* Wir beginnen mit einer Lage, in welcher  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  einander in  $E$  berühren. Dreht sich nun  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, 2$ , mit konstantem  $\omega_{j0}$  um  $p_{j0}$  und läuft  $E$  gleichzeitig entlang  $s_j$  mit einer geeigneten Geschwindigkeit, so bewegt sich  $E$  nach (6) gegenüber  $\Sigma_0$  auf der gemeinsamen Flächennormalen  $e$  mit der Geschwindigkeit  ${}^E v_{0|j} = -\omega_{j0} r_j \sin \alpha_j$  (siehe Abb. 8). Die anfängliche Berührung bleibt erhalten, sofern stets  ${}^E v_{0|1} = {}^E v_{0|2}$  gilt. Dies ist nach Satz 2 äquivalent zum konstanten Übersetzungsverhältnis  $i$ .

Die Invarianz des Übersetzungsverhältnisses hängt auch damit zusammen, dass sämtliche Flächennormalen einer Schraubtorse denselben Abstand von der Achse und denselben Winkel mit der Achse einschließen.  $\square$

Neu gegenüber [3] ist

**Satz 6** Während der gleichförmigen Bewegungsübertragung mittels zweier Schraubtoren  $\Phi_1, \Phi_2$  bleibt der im Eingriffspunkt  $E$  auftretende Winkel zwischen den Torsenerzeugenden  $g_1 \subset \Phi_1$  und  $g_2 \subset \Phi_2$  konstant. Dieser Winkel ist kongruent zum Winkel  $\theta$ , welcher von den gemeinsamen Normalen  $n_1, n_2$  zwischen  $e$  und den Achsen  $p_{10}$  bzw.  $p_{20}$  eingeschlossen wird (Abb. 5).

*Beweis:* Die Erzeugenden  $g_1 \subset \Phi_1$  und  $g_2 \subset \Phi_2$  sind ebenso wie die gemeinsamen Normalen  $n_1$  und  $n_2$  orthogonal zu der in  $\Sigma_0$  festen Eingriffsnormalen  $e$ . Zusätzlich ist  $g_j$ ,  $j = 1, 2$ , orthogonal zu  $n_j$  (siehe Abb. 8). Also sind  $\sphericalangle g_1 g_2$  und  $\sphericalangle n_1 n_2$  als Normalwinkel zueinander kongruent (siehe auch Abb. 5).  $\square$

Im Sonderfall  $\theta = 0$  entsteht

**Korollar 7** Werden zwei Schraubtoren  $\Phi_1, \Phi_2$  derart platziert, dass sie einander längs einer Erzeugenden berühren, so bleibt diese Linienberührung während der gleichförmigen Bewegungsübertragung bestehen. In diesem Fall liegen alle Eingriffsnormalen in derselben Parallelebene zu den beiden Achsen.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Die Frage, ob es noch andere evolventenverzahnte Flanken mit Linienberührung gibt, wird in [5], Theorem 5 positiv beantwortet.

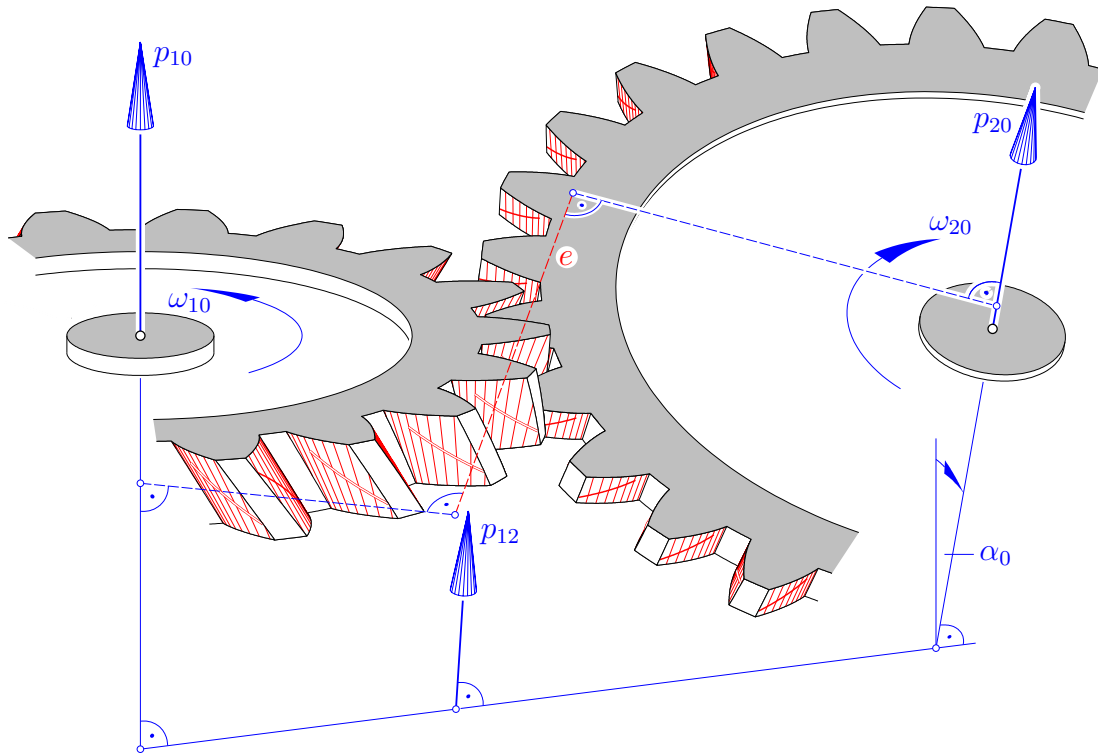


Abbildung 10: Evolventerverzahnte Räder samt effektiven Relativbahnen;  $e$  ist die konstante Eingriffsnormale

Abb. 10 zeigt zwei in Eingriff stehende evolventenverzahnte Zahnräder zum Übersetzungsverhältnis  $i = -2/3$  mit den Zähnezahlen  $z_1 = 18$  und  $z_2 = 27$ . Die zwei Radachsen  $p_{10}$  und  $p_{20}$  sind windschief bei  $\alpha_0 = 21.35^\circ$ ,  $\hat{\alpha}_0 = 117.01$ . Die gewählte Eingriffsnormale  $e$  ergibt  $\alpha_1 = -60.0^\circ$ ,  $\hat{\alpha}_1 = 45.0$ ,  $\alpha_2 = 76.98^\circ$ ,  $\hat{\alpha}_2 = 60.0$ . Der Winkel zwischen den jeweils treffenden Torsenerzeugenden ist  $\theta = 14.0^\circ$ .  $p_{12}$  ist die Achse der Relativbewegung  $\Sigma_2/\Sigma_1$ . Die auf den Zahnflanken eingetragenen Kurvenbögen zeigen die effektiven Relativbahnen des Eingriffspunktes. In [5] sind auch noch Ansichten der Zahnflanken in Richtung von  $e$  sowie — zur Kontrolle des Flankenspiels — normal zu  $e$  gezeigt.

## Literatur

- [1] F. HOHENBERG: *Konstruktive Geometrie in der Technik*. 3. Aufl., Springer Verlag, Wien 1966.
- [2] M. HUSTY, A. KARGER, H. SACHS, W. STEINHILPER: *Kinematik und Robotik*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1997.

- [3] J. PHILLIPS: *General Spatial Involute Gearing*. Springer Verlag, New York 2003, 498 p.
- [4] H. STACHEL: *Instantaneous spatial kinematics and the invariants of the axodes*. Proc. Ball 2000 Symposium, Cambridge 2000, no. 23, 14 p.
- [5] H. STACHEL: *On Jack Phillips' Spatial Involute Gearing*. Proc. 11th ICGG, Guangzhou / China, 2004, 43–48.
- [6] W. WUNDERLICH: *Ebene Kinematik*. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.