Tensorprodukte topologischer Vektorräume - ein kategorientheoretischer Zugang

Wolfgang Eppenschwandtner
weppens@fsmat.at

3. April 2002

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **3**

1 Tensorprodukt in Multikategorien **4**

1.1 Motivation 4
1.2 Kurzeinführung in die Kategorientheorie 5
1.2.1 Multimorphismen 9
1.2.2 Bemerkungen zur Fundierung 12
1.2.3 Bemerkungen zu den Begriffen 13
1.3 Das Tensorprodukt - universelle Eigenschaft 13
1.4 Eigenschaften des Tensorprodukts 16
1.4.1 Eindeutigkeit 16
1.4.2 Kommutativität 17
1.4.3 Assoziativität 17
1.4.4 Darstellung der 2Morphismen 19
1.5 Tensorprodukt in der universellen Algebra 20
1.5.1 Der Existenzsatz 20
1.5.2 Eigenschaften und Beispiele 24
1.6 Tensorprodukt auf Vektorräumen 25

2 Topologische Vektorräume **29**

2.1 Grundlagen 29
2.1.1 Filter und Umgebungsfilter 29
2.1.2 Topologische Vektorräume 30
2.1.3 Lokalkonvexe topologische Vektorräume 34
2.2 Gleichm. Stetigkeit. u. Topologien auf dem Dual 36

2.2.1 Topologien auf LC 36
2.2.2 Gleichgradige Stetigkeit 38
2.2.3 Stetigkeitsbegriffe bilinearer Abbildungen 39

3 Tensorprodukt auf top. Vektorräumen 42

3.1 Methoden der Topologisierung 42
3.2 Isomorphien zw. $E \otimes F$ und (bi-)lin. Abbildungen 46
3.2.1 LC und das Tensorprodukt 46
3.2.2 BC und das Tensorprodukt 47
3.2.3 Topologien auf Räumen bilinearer Abbildungen 49
3.3 $\otimes_\varepsilon, \otimes_\pi, \otimes_{in}, \otimes_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ - die verschiedenen Tensortopologien 50
3.3.1 Das injektive Tensorprodukt $\otimes_\varepsilon$ 50
3.3.2 Das induktive Tensorprodukt $\otimes_{in}$ und $\otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ 51
3.3.3 Das projektive Tensorprodukt $\otimes_\pi$ 54
3.3.4 Lineare stetige Abbildungen zwischen Tensorräumen 57
3.3.5 Tensornormen 59
3.3.6 Zusammenfassung: kompatible Topologien 60
3.4 Quotienten- und Unterraumeigenschaften 61
3.5 Vollständig, nuklear und integral 64
3.5.1 $E\hat{\otimes}F$ - Vervollständigung 64
3.5.2 $\varepsilon = \pi$ - Nukleare Räume 64
3.5.3 Der Dualraum von $E \otimes_\varepsilon F$ 65
3.6 Tensoralgebra und äußere Algebra 65

Symbolverzeichnis 69

Literaturverzeichnis 72

Vorwort

Der Ausgangspunkt meiner Diplomarbeit ist eine kategorientheoretische Definition des Tensorprodukts mittels der universellen Eigenschaft. Nach Beispielen aus der universellen Algebra wird zweiten Teil auf Tensorprodukte in der Kategorie der topologischen Vektorräume näher eingegangen. Begriffe wie Bilinearformen, Tensorprodukt oder Keilprodukt werden, mit einer verträglichen Topologie versehen, betrachtet. Quasi als Nebenprodukt werden Verallgemeinerungen von endlichdimensionalen Ergebnissen der multilinearen Algebra auftreten.

Obwohl die meisten Begriffe im Text eingeführt werden, sind für das genauere Studium Kenntnisse aus multilinearer Algebra, Topologie, Funktionalanalysis oder Kategorientheorie nützlich.

Anstatt einer Notationserklärung im Vorwort möchte ich zur Referenz auf das Symbolverzeichnis im Anhang hinweisen.

Die Arbeit ist im Stil eines niedergeschriebenen Vortrags (wir = ich und der Leser) verfaßt. Ich habe versucht, die Abfolge Definition-Lemma-Satz-Beweis-■ durch verbindende Erklärungen und Motivationen aufzulockern.

Wolfgang Eppenschwandtner

Wien, 3. April 2002

weppens@fsmat.at

MSC 2000: 46A32,15A69,18D10,18A05, teilweise 03C05 und 46A03

Kapitel 1

Tensorprodukt in Multikategorien

1.1 Motivation

Darstellung von Abbildungen mit mehreren Argumenten

Betrachten wir zunächst den historischen Ursprung des Tensorprodukts nämlich Vektorräume. $B(U, V; W)$ ist der Vektorraum aller bilinearen Abbildungen von $U \times V$ nach W. Unser Ziel ist, die Eigenschaften der bilinearen Funktionen zu studieren. Wir könnten jetzt eine neue Theorie über bilineare Abbildungen aufbauen, einfacher ist es aber, wie in der Mathematik üblich, unsere Aufgabenstellung auf eine bekannte und gut studierte Theorie zurückzuführen. Wir wollen nun jede bilinearen Funktion als Verknüpfung einer speziellen bilinearen Funktion mit einer linearen Funktion ausdrücken. Gesucht ist also ein Vektorraum T und eine fixe bilineare Abbildung $t \in B(U, V; T)$, so daß sich *jede* bilineare Abbildung $f \in B(U, V; W)$ *eindeutig* in der Form

$$f = g \circ t \text{ , mit } g \in L(T, W)$$

darstellen läßt. Genauso kann man verfahren, wenn man eine Teilmenge der bilinearen Abbildungen klassifizieren will. So z.B. alle alternierenden bilinearen Abbildungen $Alt(V, V; W)$ $(f(a, a) = 0)$

Dieses Konzept ist aber nicht nur auf Vektorräume beschränkt. Seien E, F und G drei normierte Räume, oder noch allgemeiner drei topologische Vektorräume, so können wir analog die stetigen bilinearen Abbildungen $BC(E, F; G)$, wobei die Stetigkeit über die Produkttopologie definiert ist, und die getrennt stetigen bilinearen Abbildungen $BSC(E, F; G)$ (in jedem Argument stetig bei Festhalten des anderen Arguments) betrachten und ebenso ein Tensorprodukt definieren.

Verallgemeinerung von endlichdimensionalen Ergebnissen der Multilinearen Algebra

Viele Ergebnisse der Multilinearen Algebra gelten nur für den endlichdimensionalen Fall. Klassische Beweisargumente, die man im Endlichdimensionalen verwendet, sind Dimensionsvergleich und Identifikation des Vektorraums mit dem Bidualraum. Diese Methoden versagen im Unendlichdimensionalen.

Häufig sind diese Ergebnisse aber weiterhin gültig, wenn wir auf dem Vektorraum eine verträgliche Topologie definieren und statt linearen Abbildungen stetige lineare Abbildungen verwenden. Solche Verallgemeinerungen von endlichdimensionalen Ergebnissen der Multilinearen Algebra werden immer wieder quasi als Nebenprodukt auftreten.

Differentialrechnung

Eine wichtige Motivation für die multilineare Algebra sind höhere Ableitungen und Differentialformen.

Dies können wir hier verallgemeinern. Seien E und F zwei topologische (lokalkonvexe) Vektorräume. Ist eine beliebige Abbildung $\varphi : E \to F$ stetig differenzierbar im Punkt x, so ist ihre Ableitung $\varphi'(x)$ im Punkt x eine stetige lineare Abbildung von E nach F, wir schreiben $\varphi'(x) \in LC(E, F)$ und $\varphi' : E \to LC(E, F)$.

Wenn wir stetige Differenzierbarkeit oder höhere Ableitungen definieren wollen, müssen wir zunächst auf $LC(E, F)$ eine Topologie definieren. Nennen wir den Raum mit Topologie $LC_{\mathfrak{S}}(E, F)$, dann ist die zweite Ableitung $\varphi''(x)$ ein Element des Vektorraums $LC(E, LC_{\mathfrak{S}}(E, F))$. Wir können $\varphi''(x)$ auch als Element $\bar{\varphi}''(x)$ von $B(E, E; F)$ sehen mittels $\bar{\varphi}''(x)(y, z) = \bar{\varphi}''(x)(y)(z)$. Es ist nun interessant, $\varphi''(x)$ als lineare stetige Abbildung von einem topologischen Vektorraum $E \otimes E$ nach F zu betrachten.

1.2 Kurzeinführung in die Kategorientheorie

Die Kategorientheorie bildet einen Überbau über viele Teilgebiete der Mathematik, wie etwa die Theorie der Vektorräume, Topologischen Räume, Maßräume, linearen Ordnungen oder einfach nur alle Mengen. Überall gibt es gewisse ausgezeichnete verträgliche Abbildungen (lineare, stetige, meßbare, ordnungsverträgliche, ganz gewöhnliche Funktionen), die man mittels einer Abbildungskomposition zusammensetzen kann, wobei die charakteristischen Eigenschaften (Verträglichkeit) erhalten bleiben. In allen obigen Beispielen gibt es die Definition eines Produkts und einer Unterstruktur. Die universelle Algebra ist eine Verallgemeinerung aller algebraischen Strukturen, die Theorie der Kategorien umfaßt zusätzlich auch topologische und maßtheoretische Strukturen, partielle Ordnungen und viele andere Konzepte.

Man kann die Kategorientheorie mit der Weltraumforschung vergleichen. Mit Satelliten kann man die Erde von oben beobachten, aber für die detaillierte Erforschung der Welt muß man immer noch unten auf der Erde forschen.

Es gibt in der Kategorientheorie, genauso wie in der Weltraumforschung, auch eigenständige Forschungsergebnisse, die man in der „gewöhnlichen“ Welt der Mathematik nur bedingt anwenden kann.

Die Kategorientheorie bildet also einen Überblick und hilft, für konkrete Probleme die richtigen Strukturen zu finden. Sie zeigt ein anderes mathematisches Denken auf, statt mit Mengen und Elementen beschäftigt man sich vor allem mit Objekten und Pfeilen (=Morphismen) zwischen diesen Objekten.

Eine Kategorie besteht aus Objekten, Morphismen und einer Komposition.

Zunächst wollen wir die Objekte (Vektorräume, Topologische Räume, Mengen,...) zusammenfassen. Dabei können metamathematische Schwierigkeiten auftreten ($\nexists$ „Menge aller Mengen“). Wir kommen in *Bemerkungen zur Fundierung* (1.2.2) darauf zurück. Für das Folgende reicht es zu glauben, daß die Schwierigkeiten lösbar und hier nicht relevant sind.

Morphismen sind in unseren Beispielen die verträglichen Abbildungen, und die Komposition ist die gewöhnliche Abbildungskomposition.

Die folgende Begriffsbestimmung einer Kategorie soll aber als abstrakte, axiomatische Definition angesehen werden. Genauso wie nicht jeder Vektorraum endlichdimensional ist, werden nicht in allen Beispielen die Morphismen Abbildungen sein.

Definition 1.2.1 *Eine* Kategorie *besteht aus*

- *Objekten* $Ob_{\mathfrak{C}}$,
- *einer Menge von Morphismen* $Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ *für je zwei Objekte* $A,B \in Ob_{\mathfrak{C}}$
- *und einer Verknüpfung* $\circ$, *die zu je drei Objekten* $A,B,C \in Ob_{\mathfrak{C}}$ *und zu je zwei Morphismen* $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B,C)$ *einen Morphismus* $g \circ f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,C)$ *liefert,*

so daß folgende Axiome gelten:

–K1– *Für jedes Objekt* $A \in Ob_{\mathfrak{C}}$ *gibt es eine Identität* 1_A, *das heißt,*

$$\exists 1_A \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,A) \text{ mit } g \circ 1_A = g \text{ und } 1_A \circ f = f.$$

–K2– $\circ$ *ist assoziativ, das heißt,*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

für $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B,C)$ *und* $h \in Mor_{\mathfrak{C}}(C,D)$.

–*K3*– *Jeder Morphismus hat eine eindeutige Quelle und ein eindeutiges Ziel, das heißt,*

$$(A,B) \neq (A',B') \Rightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathfrak{C}}(A',B') = \emptyset.$$

Das letzte Axiom ist mehr technischer Natur. Es soll z.B $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ein anderer Morphismus als $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein.

Beispiel 1.2.2 $\mathfrak{Set}$ *ist die Kategorie der Mengen und Abbildungen. Die Objekte sind beliebige Mengen, die Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen, die Verknüpfung zweier Morphismen* $f \in Mor_{\mathfrak{Set}}(A,B) = B^A$, $g \in Mor_{\mathfrak{Set}}(B,C) = C^B$ *ist die Abbildungskomposition* $g \circ f$.

Beispiel 1.2.3 $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{K}}$ *ist die Kategorie der Vektorräume (über einem fixen Körper* $\mathbb{K}$*) und linearen Abbildungen.*

Beispiel 1.2.4 $\mathfrak{Topvect}$ *ist Kategorie der topologischen Vektorräume und stetigen linearen Abbildungen.*

Beispiel 1.2.5 *Wir können aus jedem Monoid* M *eine Kategorie* $\mathfrak{K1}$ *machen. Diese Kategorie hat nur ein Objekt, nennen wir es* $*$, *also* $Ob_{\mathfrak{K1}} := \{*\}$. *Das Monoid bildet die Menge der Morphismen, also* $Mor_{\mathfrak{K1}}(*,*) := M$. *Die Verknüpfung ist einfach die Multiplikation* $\bullet$ *in* M; *die Identität* 1_* *das neutrale Element* e. *Wir sehen, daß die Axiome* (1) *und* (2) *in diesem Falle gerade die Monoidaxiome sind.*

Nehmen wir umgekehrt eine Kategorie mit nur einem Objekt. Die Morphismenmenge bildet dann ein Monoid.

Die Morphismen sind in diesem Beispiel keine Funktionen.

In Anlehnung an die Schreibweise von Funktionen soll '$f : A \to B$' einfach $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ heißen, auch wenn f keine Funktion ist.

Wir wollen jetzt einen Schritt weitergehen, und verträgliche Zuordnungen zwischen Kategorien einführen, sogenannte Funktoren. Also, grob gesagt, das was Morphismen innerhalb einer Kategorie sind, sind Funktoren eine Stufe höher.

Definition 1.2.6 *Seien* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *zwei Kategorien, wir verwenden für die Verknüpfung in beiden Kategorien der Einfachheit halber dasselbe Symbol* $\circ$.

Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *zwischen zwei Kategorien besteht aus den Zuordnungen*

$$\begin{array}{rccc} F_{Ob}: & Ob_{\mathcal{A}} & \to & Ob_{\mathcal{B}} \\ F_{Mor}: & Mor_{\mathcal{A}}(A_1,A_2) & \to & Mor_{\mathcal{B}}(F_{Ob}(A_1),F_{Ob}(A_2)) \end{array}$$

mit

–*F1*– $F_{Mor}(g \circ f) = F_{Mor}(g) \circ F_{Mor}(f)$

–F2– $F_{Mor}(1_A) = 1_{F_{Ob}(A)}$

Wir werden in Zukunft für F_{Ob} und F_{Mor} dasselbe Symbol F verwenden. Ein Beispiel für einen Funktor ist der Bidualisierungsfunktor $\mathfrak{Vect} \to \mathfrak{Vect}$, wo jedem Vektorraum sein Bidualraum und jeder linearen Abbildung die biduale (bitransponierte) lineare Abbildung zugeordnet wird. Nimmt man stattdessen den dualen Vektorraum und die transponierte lineare Abbildung, so dreht sich nur die Reihenfolge in –F1– um. Man nennt dies dann kontravarianten Funktor, im Gegensatz zu dem normalen, kovarianten Funktor.

Bei vielen Kategorien sind die Objekte Mengen mit einer gewissen „Struktur“, die Morphismen Abbildungen, die „verträglich“ sind, und deren Verknüpfung $\circ$ die gewöhnliche Abbildungskomposition ist. Solche Kategorien nennen wir *konkrete Kategorien.*

In konkreten Kategorien gibt es den sogenannten *Vergißfunktor* $V : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Set}$. Wenn wir den Vergißfunktor $V : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Set}$ anwenden, dann betrachten wir die Objekte roh als Mengen und die Morphismen als Abbildungen ohne Strukturverträglichkeit.

So bildet etwa in der Kategorie der Vektorräume der Vergißfunktor $V : \mathfrak{Vect} \to \mathfrak{Set}$ den Vektorraum $(A, +, 0, \cdot, \mathbb{K})$ auf die Menge A ab.

Die einelementige Kategorie $\mathfrak{K}\mathfrak{1} = (\{*\}, M, \bullet)$ ist ein Beispiel für eine nichtkonkrete Kategorie.

Für die Einführung des Tensorprodukts werden wir, wie in der Kategorientheorie üblich, viele Diagramme verwenden.

Ein Diagramm, auch Pfeildiagramm genannt, besteht aus einem gerichteten Graphen und Beschriftungen. Die Knoten symbolisieren Objekte, die Pfeile Morphismen in einer festen Kategorie. Die Identitäten läßt man gewöhnlich weg. Ein Weg $f_1, ..., f_n$ durch den Graphen steht für die Verknüpfung $f_n \circ \cdots \circ f_1$.

Definition 1.2.7 *Ein Diagramm ist* kommutativ $\iff$ *Egal welchen Weg wir von einem Objekt zu einem anderen durch das Diagramm gehen, wir erhalten immer den selben zusammengesetzten Morphismus.*

Viele Eigenschaften einer gewöhnlichen Funktion lassen sich unter Verwendung von Diagrammen in der Sprache der Kategorientheorie „schöner“ darstellen.

Wir wollen als Beispiel injektive und surjektive Funktionen betrachten. Es ist leicht zu sehen, daß eine Funktion f injektiv ist $\iff$ für zwei beliebige Funktionen g_1 und g_2 gilt stets $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$. Oder Diagrammform dargestellt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"] & B \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad g_1 = g_2 \tag{*}$$

Das linksstehende Diagramm ist ein Beispiel für ein kommutatives Diagramm in der Kategorie $\mathfrak{Set}$ der Mengen. Wir werden im folgenden, ohne es immer extra zu erwähnen, nur kommutative Diagramme gebrauchen.

Die Surjektivität einer Funktion läßt sich jetzt ganz einfach beschreiben: Wir brauchen nur in der Beschreibung der Injektivität alle Pfeilrichtungen umdrehen. Also f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ für zwei beliebige Funktionen g_1 und g_2 gilt stets $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$. Man bekommt immer durch Umdrehen der Pfeilrichtungen einen zweiten Begriff, den sogenannten *dualen* Begriff.

Das Diagramm aus (*) kann man aber auch in einer anderen Kategorie betrachten, man nennt einen Morphismus, der (*) erfüllt, *Monomorphismus*. Die Monomorphismen in $\mathfrak{Set}$ sind also die injektiven Abbildungen, in $\mathfrak{Topvect}$ sind es alle stetigen Einbettungen, in $\mathfrak{Kl}$ alle linkskürzbaren Elemente.

Wir führen wir noch einen wohlbekannten Begriff ein:

Definition 1.2.8 *$f : A \to B$ heißt* Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ *$\exists g : B \to A$, so daß*

$$g \circ f = 1_A \textit{ und } f \circ g = 1_B \textit{ gilt.}$$

1.2.1 Multimorphismen

Nun werden, der Motivation folgend, verträgliche Funktionen in mehreren Variablen in das abstrakte kategorientheoretische Konzept eingebunden. Wir führen zusätzlich zu den Morphismen einer Kategorie *Multimorphismen* ein.

Multimorphismen haben mehrere Quellobjekte $A_1, ..., A_n$. Wir bezeichnen die Menge aller Multimorphismen von $A_1, ..., A_n$ nach C mit

$$MultiMor(A_1, ..., A_n; C).$$

Ähnlich wie bei gewöhnlichen Morphismen wollen wir auch die Notation

$$f :< A_1, ..., A_n > \to C$$

verwenden. Wenn nur zwei Quellobjekte A, B auftreten, dann nennen wir die Multimorphismen auch 2Morphismen und bezeichnen sie mit $2Mor(A, B; C)$. Die 1Morphismen $MultiMor(A; C)$, also die Multimorphismen mit einem einzigen Quellobjekt, sind die Morphismen der Kategorie.

Die Verknüpfung von Multimorphismen ist der Verknüpfung von Funktionen in mehreren Argumenten nachempfunden. Wenn wir Multimorphismen $f_i :< A_1^i, \dots, A_n^i >\to C^i$, $i = 1, \dots, m$ mit $g :< C^1, \dots, C^m >\to D$ verknüpfen, so ist das Ergebnis ein Multimorphismus

$$g \circ (f_1, ..., f_m) :< A_1^1, \dots, A_n^1, A_1^2, \dots, A_n^2, \dots\dots, A_n^m >\to C.$$

Ähnlich wie bei gewöhnlichen Kategorien können wir die Verknüpfung von Multimorphismen visualisieren, in Form einer baumartigen Struktur. Wir setzen

$$f_1 : A_1 \longrightarrow B_1,\ f_2 : A_2 \longrightarrow B_2,\ g :< B_1, B_2 > \longrightarrow C, \text{ und } h : C \longrightarrow D$$

zusammen.

Aus
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "f_1"'] & & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_1 & & B_2 \\ < B_1 & , \arrow[d, "g"'] & B_2 > \\ & C & \\ & C \arrow[d, "h"'] & \\ & D & \end{tikzcd}$$
erhalten wir
$$\begin{tikzcd} < A_1, A_2 > \arrow[d, "h \circ g \circ (f_1, f_2)"] \\ D \end{tikzcd}$$

Die Axiome –K1– bis –K3– lassen sich sinngemäß auf Multimorphismen erweitern:

–M1– *Für jedes Objekt $A \in Ob_{\mathfrak{C}}$ gibt es eine Identität 1_A, so daß*

$$f \circ (1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}) = f \text{ und } 1_C \circ g = g$$

erfüllt ist.

–M2– *Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, das heißt, egal wie geklammert wird, das Ergebnis ist immer dasselbe.*

$$\begin{aligned} f \circ (g_1 \circ (h_1^1, \dots, h_1^{m_1}), \dots, g_n \circ (h_n^1, \dots, h_n^{m_n})) \\ = (f \circ (g_1, \dots g_n)) \circ (h_1^1, \dots, h_n^{m_n})) \end{aligned}$$

–M3– *Jeder Multimorphismus hat eindeutige Quellen und ein eindeutiges Ziel.*

Eine Kategorie zusammen mit Multimorphismen $Multimor_{\mathfrak{M}}$ nennen wir Multikategorie.

Einige Beispiele von Multikategorien:

- Ausgegangen sind wir von Funktionen in mehreren Variablen. Aus jeder konkreten Kategorie bekommen wir eine Multikategorie wenn wir als Multimorphismen jene Abbildungen in mehreren Variablen nehmen, die in jeder Variablen, bei Festhalten der anderen Variablen, Morphismen sind. Das heißt im Falle eines 2Morphismus $f :< A, B >\rightarrow C$ müssen die Abbildungen $x \mapsto f(x, b)$ und $y \mapsto f(a, y)$, mit $a \in A$, $b \in B$ fest, Morphismen sein.

  Die in der Motivation verwendeten bilinearen Abbildungen $B(A, B; C)$ werden wir als 2Morphismen in $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{K}}$ nehmen. Die getrennt stetigen bilinearen Abbildungen $BSC(A, B; C)$ sind eine mögliche sinnvolle Wahl der 2Morphismen bei topologischen Vektorräumen (oder normierten Räumen).

- Ein triviales Beispiel: Die Multimorphismen $MultiMor_{\mathfrak{M}}(A_1 ... A_n, B)$ sind alle $n-$Tupel $(f_1, ..., f_n)$ von Morphismen $f_i : A_i \longrightarrow C$. Diese Tupel nennt man auch Kokegel (=cocone).

- Ein anderes, einfaches Beispiel: Die Multimorphismen der Multikategorie $\mathcal{C}_{\blacktriangleright}$, $MultiMor_{\mathcal{C}_{\blacktriangleright}}(A_1 ... A_n, C)$ sind einfach die Morphismen $Mor_{\mathcal{C}}(A_1, C)$, das heißt wir vergessen die anderen „Variablen“.

Was ist der Sinn des letzten Beispiels? Wir sehen, daß die Definition von Multimorphismen nicht symmetrisch ist. Daher die nächste Definition, wobei wir der Übersichtlichkeit halber nur 2Morphismen betrachten:

Definition 1.2.9 *Eine Multikategorie ist* symmetrisch $\Longleftrightarrow$ *Für jeden 2Morphismus $f :< A, B >\rightarrow C$ gibt es einen 2-Morphismus $\overline{f} :< B, A >\rightarrow C$, den wir durch Vertauschen der Ursprungsobjekte erhalten, so daß*

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[ddlll, dash, "id_A"'] \arrow[ddrrr, dash, "id_A"] & & & \\
 & & & B \arrow[dl, dash, "id_B"'] \arrow[dr, dash, "id_B"] & & & \\
< A & , \arrow[d, "f"'] & B > & & < B & , \arrow[d, "\overline{f}"'] & A > \\
 & C \arrow[rrrr, dash, "id_C"] & & & & C &
\end{tikzcd}$$

Bis jetzt schaut es so aus, als wären Multikategorien etwas Neues, als müßten wir alle Begriffe der Kategorientheorie erweitern. Das ist aber nicht der Fall. Wir können jede Multikategorie $\mathfrak{M}$ als Teilmenge einer größeren Kategorie $\mathfrak{C}$ sehen, die folgendermaßen konstruiert wird:

- Objekte: endliche Folgen von $\mathfrak{M}$-Objekten $< A_1, \ldots, A_n >$
- Morphismen: Folgen von $\mathfrak{M}$-Multimorphismen
- Verknüpfung $\circ$: elementweise Verknüpfung

Die $\mathfrak{M}$-Multimorphismen finden sich in der Kategorie $\mathfrak{C}$ wieder, es sind genau jene $\mathfrak{C}$-Morphismen, die als Zielobjekt eine Folge $< C >$ mit nur einem Objekt haben. –M1– bis –M3– ergeben sich nun direkt aus –K1– bis –K3–.

1.2.2 Bemerkungen zur Fundierung

Alle Mengen sind Objekte von $\mathfrak{Set}$. Also sollte $Ob_{\mathfrak{Set}}$ die Menge aller Mengen sein. Man kann aber nicht widerspruchsfrei die Menge aller Mengen bilden. Denn gäbe es so eine Universalmenge $V = Ob_{\mathfrak{Set}}$, so würde die Bildung von

$$R := \{x \in V : x \notin x\} \subseteq V$$

zu dem Widerspruch $R \in R \Longleftrightarrow R \notin R$ führen.

Diese Argumentation, auch Diagonalisierung genannt, beruht auf der Rückbezüglichkeit. Hier setzt man an, man führt einen neuen Begriff einer „Zusammenfassung von Objekten" ein, den Begriff einer *Klasse*.

Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht notwendigerweise umgekehrt. Klassen, die keine Mengen sind, heißen *echte Klassen*. Klassen können Mengen enthalten, *nicht aber echte Klassen*.

Die Zusammenfassung aller Objekte $Ob_{\mathfrak{C}}$ bildet eine Klasse, oft eine echte, wie etwa bei $Ob_{\mathfrak{Set}}$. Das ist aber keine Einschränkung, wir werden nie $Ob_{\mathfrak{C}}$ als Element einer Ansammlung ansehen.

In der Definition der Kategorie wurde bei den Objekten das Wort „Menge" bewußt vermieden. Nicht aber bei der Definition von $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$, der Menge der Morphismen von A nach B. Das heißt, daß $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ ein Element von $Ob_{\mathfrak{C}}$ sein kann, weil Klassen Mengen enthalten können.

Das wird auch oft zutreffen, z.B. bildet die Menge der linearen Abbildungen zwischen zwei fixen Vektorräumen selbst einen Vektorraum.

Näheres zu den mengentheoretischen und logischen Grundlagen findet man z.B. in [JW95] oder in [HS73].

1.2.3 Bemerkungen zu den Begriffen

Der Begriff einer Multikategorie wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet, manche Autoren verwenden den Begriff „Polykategorie“. Erstmals hat [Lam89] Multikategorien eingeführt, bei der Untersuchung von Beweiskalkülen. Oft bezeichnet man als Multikategorie auch die größere Kategorie $\mathfrak{C}$, in der die Multimorphismen als Morphismen mit nur einer Quelle auftreten.

Es gibt unterschiedliche Verwendungen des Begriffs „Bimorphismen“. Während darunter in [Mit69] Morphismen gemeint sind, die sowohl Epimorphismen also auch Monomorphismen sind, bezeichnet [ZS79] als Bimorphismus eine Abbildung, die in jeder Variablen ein Morphismus ist. Wir verwenden deshalb den Begriff 2Morphismus.

Weitergehende Einführungen in die Kategorientheorie findet man z.B. in [Mac98], [AM75], [Mit69] oder [ZS79].

1.3 Das Tensorprodukt - universelle Eigenschaft

Mit der formalen Sprache der Kategorientheorie wollen wir nun die Idee aus der Motivation formulieren. Wir wollen die Familie $2Mor(A, B; S)$ (in den Beispielen $B, Alt, BSC, BC, ...$) „klassifizieren“.

Definition 1.3.1 *Es seien $A, B \in Ob_{\mathfrak{M}}$ Objekte einer Multikategorie $\mathfrak{M}$.*

Ein Paar (t, T), $T \in Ob_{\mathfrak{M}}$ und $t :< A, B >\to T$ heißt Tensorprodukt *von A und B in der Multikategorie $\mathfrak{M}$*
$\Longleftrightarrow$

Für jedes Objekt S und jeden Multimorphismus $f :< A, B >\to S$ gibt es genau *einen Morphismus $g : T \to S$, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} < A, B > \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, "\exists! g"] \\ S & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Oder anders ausgedrückt:

$$\forall\, S \in Ob_{\mathfrak{M}},\ f \in 2Mor_{\mathfrak{M}}(A, B; S) : \exists! g \in Mor_{\mathfrak{M}}(T, S) \text{ mit } g \circ t = f.$$

Im folgenden bezeichnen wir solche „universellen“ Morphismen t auch mit $\otimes$ und das Objekt T mit $A \otimes B$. Das obige Konzept heißt *universelle Eigenschaft* des Tensorprodukts. Ein Bildelement $\otimes(x, y)$, $x \in A$, $y \in B$ bezeichnen wir mit $x \otimes y$. Wir nennen

g eine universelle „Fortsetzung" von f. Der Morphismus g ist aber, auch bei konkreten Kategorien im allgemeinen keine Fortsetzung im üblichen mengentheoretischen Sinne, daher werden wir die Anführungszeichen beim Begriff „Fortsetzung" beibehalten.

Wir haben den Begriff eines Tensorprodukts zweier Objekte definiert. Wir wollen jetzt ein Tensorprodukt zweier Morphismen einführen. Meist betrachtet man vor allem die Objekte und deren Eigenschaften. Es ist aber, insbesondere in der Kategorientheorie, oft natürlicher, die Eigenschaften der Morphismen zwischen den Objekten zu betrachten. Zugleich wird dies die erste Anwendung der universellen Eigenschaft sein.

Definition 1.3.2 *Seien $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ Morphismen und seien $A \otimes B$ und $A' \otimes B'$ Tensorprodukte. Dann heißt der eindeutige Morphismus $f \otimes g : A \otimes B \to A' \otimes B'$, der durch die universelle Eigenschaft des 2Morphismus'*

$$\begin{aligned} \otimes \circ (f, g) :< A, B > &\to A' \otimes B' \\ (x, y) &\mapsto f(x) \otimes g(y) \end{aligned}$$

induziert wird, Tensorprodukt von f und g. *Man sieht die Definition schön im Diagramm*

$$\begin{tikzcd} < A, B > \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & A \otimes B \arrow[d, dashed, "\exists! f \otimes g"] \\ < A', B' > \arrow[r, "\otimes"] & A' \otimes B' \end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $A \otimes B$ von A und B wird dabei verwendet.

Definition 1.3.3 $B : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *heißt* Bifunktor $\iff$ *Für jedes Objekt A ist $B(id_A, \bullet)$ und $B(\bullet, id_A)$ ein Funktor*

Das Tensorprodukt ist ein Bifunktor $\otimes : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$:

- Zwei Objekte A und B werden auf das Tensorprodukt $A \otimes B$[1] abgebildet,
- zwei Morphismen f und g auf $f \otimes g$.

Die Eigenschaften eines Bifunktors überprüft man schnell, sie folgen aus dem nächsten Lemma:

[1]Wir zeigen in 1.4.1, daß das Tensorprodukt nur eindeutig bis auf Isomorphie ist. Genauer müßte es also heißen: Zwei Objekte werden auf einen Repräsentanten der Isomorphieklasse von $A \otimes B$ abgebildet.

Lemma 1.3.4 *$id_A \otimes id_B = id_{A \otimes B}$ und $(f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2) = (f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2)$*

Beweis. Wir müssen nur unter das letzte Diagramm eine „Kopie“ des Diagramms anhängen.

$$\begin{tikzcd}
< A, B > \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, shift right=2, "f_1"'] \arrow[d, shift left=2, "g_1"] & A \otimes B \arrow[d, dashed, "f_1 \otimes g_1"'] \arrow[dd, bend left=60, "\exists!(f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2)"] \\
< A', B' > \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, shift right=2, "f_2"'] \arrow[d, shift left=2, "g_2"] & A' \otimes B' \arrow[d, dashed, "f_2 \otimes g_2"'] \\
< A'', B'' > \arrow[r, "\otimes"] & A'' \otimes B''
\end{tikzcd}$$

Wir können

- entweder die universellen Eigenschaften im oberen und mittleren Niveau verwenden und dann zusammensetzen,
- oder die universelle Eigenschaft des obersten Tensorprodukts bezüglich des gesamten zusammengesetzten 2Morphismus verwenden.

Aufgrund der Eindeutigkeit des letzteren induzierten Morphismus müssen beide Vorgangsweisen dasselbe ergeben. ■

Also ist sowohl $\bullet \otimes B : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ als auch $A \otimes \bullet : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ ein Funktor.

Um keine Mißverständnisse aufkommen zu lassen ist es wichtig, auf eine Uneindeutigkeit der Notation hinzuweisen. In $\mathfrak{Vect}$ zum Beispiel betrachten wir für zwei Funktionen $f, g \in L(A, B)$ den Ausdruck '$f \otimes g$'. Das kann nun einerseits ein Element $\otimes(f, g)$ von $L(A, B) \otimes L(A, B)$ sein, andererseits kann es sich dabei aber auch um eine Funktion aus $L(A \otimes A, B \otimes B)$ handeln. Man muß also immer auf den Kontext schauen.

Das Tensorprodukt zweier Funktionen im letzteren Sinn, also als Morphismenabbildung des Bifunktors, wird oft auch als *Kroneckerprodukt* $f \underline{\otimes} g$ bezeichnet. Wir wollen diese Notation aber nicht verwenden.

Die Definition des Tensorprodukts hängt immer von der Wahl der Multimorphismen ab. Wir können a priori nicht von *dem* Tensorprodukt einer Kategorie sprechen, ohne die Multimorphismen anzugeben. Manchmal wird es nur eine sinnvolle Wahl für die Multimorphismen geben, manchmal hängt es aber vom Kontext ab, welche Multimorphismen zu nehmen sind.

Betrachten wir kurz wie das Tensorprodukt in den einfachen Beispielen für Multikategorien aussieht.

- Jeder 2Morphismus $f :< A, B >\to C$ besteht aus zwei getrennten Morphismen $f_A : A \to C$ und $f_B : B \to C$. Dann führt die universelle Eigenschaft zu der Definition des *Koprodukts* $A \sqcup B$, also in $\mathfrak{Set}$ zu der disjunkten Vereinigung oder in $\mathfrak{Vect}$ zu der direkten Summe.

- In der Multikategorie $\mathcal{C}_\blacktriangleright$ $(2Mor_{\mathcal{C}_\blacktriangleright}(A, B; C) = Mor_{\mathcal{C}}(A, C))$ finden wir das Tensorprodukt von A und B schnell: es ist einfach A.

1.4 Eigenschaften des Tensorprodukts

Nun haben wir das allgemeine Konzept in der Sprache der Kategorientheorie definiert, wir dürfen aber nicht vergessen, daß wir noch nicht wissen, *ob es überhaupt ein Tensorprodukt gibt*, und wie viele es davon gibt.

Die Frage der Existenz eines Tensorprodukts kann man aber nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen in der Ebene der Kategorientheorie beantworten. Auf jeden Fall ist das Tensorprodukt aber, wenn es existiert, eindeutig. Unter Eindeutigkeit ist natürlich Eindeutigkeit bis auf Isomorphie gemeint. Und weil diese Aussage allgemein gilt und außerdem mit einfachen Mitteln zu zeigen ist, fangen wir gleich damit an.

1.4.1 Eindeutigkeit

Satz 1.4.1 *Wenn es ein Tensorprodukt gibt, dann ist es bis auf Isomorphie eindeutig.*

Beweis. Die folgenden Überlegungen kann man sehr gut im Diagramm nachvollziehen.

$$\begin{tikzcd}
{< A, B >} \arrow[r, "\otimes_1"] \arrow[d, "\otimes_2"] \arrow[dr, "\otimes_2"] & T_1 \arrow[d, dashed, shift right, "g"'] \\
T_2 \arrow[r, dashed, "g \circ f = 1_{T_2}"'] & T_2 \arrow[u, dashed, shift right, "f"']
\end{tikzcd}$$

Wir nehmen zwei Tensorprodukte, $(\otimes_1, T_1)$ und $(\otimes_2, T_2)$. Setzen wir das Objekt S der Definition jeweils gleich T_i, so erhalten wir durch Anwendung der universellen Eigenschaft ein Paar (f, g) von Morphismen zwischen T_1 und T_2 mit

$$g \circ \otimes_1 = \otimes_2$$
$$f \circ \otimes_2 = \otimes_1$$

und nach Einsetzen $g \circ f \circ \otimes_2 = \otimes_2$.

Jetzt wenden wir ein weiteres Mal die universelle Eigenschaft an, dieses Mal mit einer Kopie von T_2. Der universelle Morphismus ist 1_{T_2}, die Identität. Da der universelle Morphismus aber eindeutig sein muß, ist $g \circ f = 1_{T_2}$. Analog folgt $f \circ g = 1_{T_1}$, also sind die beiden Tensorprodukte isomorph, $T_1 \cong T_2 := A \otimes B$ ■

1.4.2 Kommutativität

Satz 1.4.2 *Seien $A, B \in Ob_{\mathfrak{M}}$ Objekte einer symmetrischen Multikategorie. Dann gilt:*

$$A \otimes B \cong B \otimes A$$

Beweis. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[ddlll, dash, "1_A"'] \arrow[ddrrr, dash, "1_A"] & & & \\
 & & & B \arrow[dl, dash, "1_B"'] \arrow[dr, dash, "1_B"] & & & \\
< A & , \arrow[d, "\otimes_1"'] & B > & & < B \arrow[dlll, "\overline{\otimes}_1"] & , \arrow[d, "\otimes_2"] & A > \\
 & A \otimes B \arrow[rrrr, dashed, shift right, "g"'] & & & & B \otimes A \arrow[llll, dashed, shift right, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der Symmetrie existiert der Morphismus $\overline{\otimes}_1$ (genauso $\overline{\otimes}_2$). Jetzt wenden wir die universellen Eigenschaften der beiden Tensorprodukte an und bekommen wir jeweils:

$$\exists! g \in Mor_{\mathfrak{M}}(A \otimes B, B \otimes A) : g \circ \otimes_1 = \overline{\otimes}_2$$
$$\exists! f \in Mor_{\mathfrak{M}}(B \otimes A, A \otimes B) : f \circ \otimes_2 = \overline{\otimes}_1$$

Wir schauen uns die zweite Gleichung mit „vertauschten Argumenten", also nach Anwendung von $^-$an.

$$f \circ \overline{\otimes}_2 = \overline{f \circ \otimes_2} = \overline{\overline{\otimes}}_1 = \otimes_1$$

Wie bei der Eindeutigkeit des Tensorprodukts können wir daher schließen, daß f und g Isomorphismen sind. ■

1.4.3 Assoziativität

Nicht in jeder Multikategorie wird das Tensorprodukt das *Assoziativitätsgesetz*[2]

[2]Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf drei Objekte.

$$A \otimes B \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$$

erfüllen. Genauso wie im Beweis der Kommutativität die Symmetrie der Multimorphismen eingegangen ist, werden auch hier zusätzliche Voraussetzungen für die Multikategorie nötig sein.

Wir wollen uns für diese Untersuchung aber auf konkrete Kategorien beschränken, das heißt die Multimorphismen sind Funktionen in mehreren Argumenten.

Unser Ziel ist, zu zeigen, daß $\otimes(\otimes(\bullet,\bullet),\bullet)$ ein universeller 3Morphismus ist, das heißt, daß es für alle φ genau ein g mit $g \circ \otimes(\otimes(\bullet,\bullet),\bullet) = \varphi$ gibt.

$$\begin{tikzcd}
< A, B, C > \arrow[r, "\otimes(\otimes(\bullet,\bullet),\bullet)"] \arrow[d, "\varphi"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[dl, "\exists! g"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

Ein Beweis der Assoziativität des Tensorprodukts, unter geeigneten Voraussetzungen, würde etwa so verlaufen:

Beweisskizze. Wir fixieren $c \in C$ und finden durch die universelle Eigenschaft von $A \otimes B$ für $\varphi_c(a,b) := \varphi(a,b,c)$ einen Morphismus $f_c : A \otimes B \to C$. Jetzt setzen wir $f(z,c) := f_c(z)$ und erhalten den gewünschten Morphismus $g : (A \otimes B) \otimes C \to S$ mit

$$\varphi(a,b,c) = \varphi_c(a,b) = f_c(a \otimes b) = f(a \otimes b, c) = g((a \otimes b) \otimes c).$$

$\blacksquare$

In dieser Beweisskizze traten zwei Punkte auf, die wir in die Voraussetzungen aufnehmen werden:

- Festhalten eines Arguments: Für jedes $c \in C$ muß $\varphi_c(a,b) := \varphi(a,b,c)$ ein 2Morphismus sein.
- Zusammensetzen der einzelnen Morphismen: $f(z,c) := f_c(z)$ muß ein 2Morphismus $f :< A \otimes B, C >\to S$ sein.

Wir werden später auf diese zwei Punkte zurückkommen.

Zusätzlich zu der Assoziativität des Tensorprodukts existiert in den klassischen Anwendungen des Tensorprodukts ein Objekt 1, das für die „Operation" $\otimes$ ein „neutrales Element" ist, also $A \otimes 1 \cong A \cong A \otimes 1$. Dafür gibt es auch ein allgemeineres Konzept:

Definition 1.4.3 *Eine* monoidale Kategorie $(\mathfrak{C}, \boxdot, 1)$ *besteht aus einer Kategorie* $\mathfrak{C}$, *einem Bifunktor* $\boxdot : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ *und einem Objekt* $1 \in Ob_{\mathfrak{C}}$ *mit*

$$A \boxdot 1 \cong A \cong A \boxdot 1 \textit{ und } A \boxdot (B \boxdot C) \cong (A \boxdot B) \boxdot C,$$

(wobei die Isomorphien natürlich[3] *und kohärent sind).*

Eine symmetrische monoidale Kategorie*, auch* Tensorkategorie *genannt, ist eine monoidale Kategorie mit* $A \boxdot B \cong B \boxdot A$.

Wenn das Tensorprodukt assoziativ ist, und ein neutrales Element existiert, dann wird erhalten wir eine monoidale Kategorie. Umgekehrt ist kann man aus jeder (symmetrischen) monoidalen Kategorie eine (symmetrische) Multikategorie machen, die Multimorphismen werden durch

$$MultiMor(A_1, \ldots, A_n; S) := Mor_{\mathfrak{M}}(A_1 \boxdot \cdots \boxdot A_n, S)$$

festgelegt.

1.4.4 Darstellung der 2Morphismen

Lemma 1.4.4 *Folgende Funktion ist eine Bijektion*

$$\begin{aligned} MultiMor(A, B; S) &\to Mor_{\mathfrak{M}}(A \otimes B, S) \\ f &\mapsto g \end{aligned}$$

wobei g *jener eindeutige Morphismus ist, der das Diagramm in der Definition des Tensorprodukts kommutativ macht.*

Beweis. Die Definition des Tensorprodukts sagt aus, daß für jedes f genau ein g existieren muß, also haben wir es wirklich mit einer Funktion zu tun. Durch $g \mapsto g \circ \otimes$ können wir leicht die inverse Funktion bilden. ■

Oft kann man sowohl auf $MultiMor(A, B; S)$ als auch $Mor_{\mathfrak{M}}(A \otimes B, S)$ eine Struktur definieren, so daß diese Mengen selbst Objekte sind. So ist etwa die Menge aller bilinearen oder aller linearen Funktionen wieder ein Vektorraum, im Falle eines topologischen Vektorraums können wir darauf auch wieder eine Topologie definieren. In diesen Anwendungen wird die obige Bijektion einen Isomorphismus liefern, wir werden dies bei normierten Räumen überprüfen (Lemma 3.3.9).

[3] Die zwei Bedingungen „natürlich“ und „kohärent“ werden in allen Beispielen immer trivialerweise erfüllt sein. *Natürlich* heißt im Wesentlichen verträglich mit allen Morphismen. *Kohärent* heißt, daß man die beiden Gesetze auch auf alle komplexeren aus $\boxdot$,1 und mehreren Objekten zusammengesetzten Formeln anwenden kann. Siehe [Mac98, Chapt VII].

1.5 Tensorprodukt in der universellen Algebra

In diesem Abschnitt betrachten wir als Kategorie eine *Klasse von universellen Algebren.*

Die Objekte sind Algebren (A, F), die Homomorphismen bilden die Morphismen. Die Multimorphismen seien getrennt homomorphe Abbildungen, das heißt Funktionen in mehreren Argumenten, die in jedem Argument die Homomorphiebedingung erfüllen.

Die Signatur Ω einer Algebra gibt die Anzahl und Stelligkeit der Operationen an. Wir betrachten vorerst nur Algebren mit endlicher Signatur.

1.5.1 Der Existenzsatz

Wir wollen die Existenz des Tensorprodukts für Varietäten zeigen.

Definition 1.5.1 *Eine* Varietät $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\Omega, \Sigma)$ *ist eine Klasse* $\mathcal{V}$ *von universellen Algebren der Signatur* Ω*, die durch eine Menge* Σ *von Gleichungen definiert sind.*

Zum Beispiel bilden Gruppen (Ringe, boolesche Algebren,...) eine Varietät, nicht aber Körper ($0 \neq 1$ ist eine Ungleichung, keine Gleichung).

In Varietäten können wir das Erzeugnis $\langle X \rangle_{\mathcal{V}} := \bigcap \{A \supseteq X : A \in \mathcal{V}\}$, das Produkt $\prod A_i$ und die Unteralgebra

$$Equ_A(g_1, g_2) := \{x \in A : g_1(x) = g_2(x)\} \leq A$$

betrachten, alle liegen wieder in $\mathcal{V}$.

Der Existenzbeweis besteht aus zwei Schritten. Zuerst wird eine Algebra konstruiert, die eine etwas schwächere Bedingung als das Tensorprodukt erfüllt ($\exists g$ statt $\exists! g$). Wir nennen diese Algebra für diesen Abschnitt Prätensorprodukt.

Definition 1.5.2 (T, t) *heißt ein* Prätensorprodukt *von* A *und* B *in* $\mathcal{V} \Longleftrightarrow$

Für jedes Objekt S *und jeden Multimorphismus* $f :< A, B >\to S$ *gibt es einen Morphismus* $g : T \to S,$ *so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} < A, B > \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, "\exists g"] \\ S & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Aus dem Prätensorprodukt wird dann das Tensorprodukt gewonnen. Wir wollen mit diesem letzten Schritt beginnen:

Lemma 1.5.3 *In einer Varietät gilt:*
(T,t) *ist das Tensorprodukt von* A *und* B $\Longleftrightarrow$ (T,t) *ist Prätensorprodukt und* $T = \langle t(A,B)\rangle_{\mathcal{V}}$.

Beweis.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Es gilt $T \supseteq \langle t(A,B)\rangle_{\mathcal{V}}$. Wenn wir die universelle Eigenschaft auf $\langle t(A,B)\rangle_{\mathcal{V}}$ und t anwenden, bekommen wir die Gleichung $s \circ t = t$. Da die Identität id_T der eindeutige Homomorphismus mit dieser Eigenschaft ist, muß s die Identität sein.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Angenommen, es gäbe zwei universelle „Fortsetzungen“ g_1 und g_2 zu $f :< A, B >\rightarrow C$. dann betrachten wir die Menge

$$Equ_T(g_1, g_2) := \{x \in T : g_1(x) = g_2(x)\}\,.$$

$Equ_T(g_1, g_2)$ bildet eine Unteralgebra von T, andererseits liegen die Bilder $t(A,B)$ in $Equ_T(g_1, g_2)$. Daher gilt $T = \langle t(A,B)\rangle_{\mathcal{V}} \subseteq Equ(g_1, g_2)$, also $g_1 = g_2$.

■

Wenn ein Prätensorprodukt T existiert, brauchen wir nur noch das Erzeugnis $\langle t(A,B)\rangle_{\mathcal{V}} \leq T$ bilden. $\langle t(A,B)\rangle_{\mathcal{V}}$ ist dann das Tensorprodukt von A und B.

Um den Existenzsatz zu beweisen müssen wir jetzt noch ein Prätensorprodukt „konstruieren“. Vor dieser Konstruktion noch kurzer Blick auf Ordinalzahlen und Kardinalzahlen.

Ordinalzahlen werden als “Erweiterung der natürlichen Zahlen“ mittels transfiniter Induktion aufgebaut. Die ersten Ordinalzahlen sind:

$0 := \emptyset$, $1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $n+1 := n \cup \{n\}$, $\omega := \{0, 1, \ldots\} = \mathbb{N}$, weiter geht es mit, $\omega+1 = \omega \cup \{\omega\}$ in späterer Folge, $\omega.2 = \omega+\omega = \bigcup_{k\in\omega}(\omega+k)$, $\omega.\omega = \bigcup_{k\in\omega}(\omega.k), \omega^{\cdot^{\omega}}, \ldots$. Die Vereinigung aller bisherigen Ordinalzahlen heißt ω_1, und auch mit ω_1 wird die Prozedur fortgesetzt.

Sei κ eine Ordinalzahl. Wenn es keine Bijektion von κ zu einer kleineren Ordinalzahl gibt, dann nennen wir κ Kardinalzahl. Mit dem Auswahlaxiom (Wohlordnungssatz) folgt, daß jede Menge gleichmächtig mit einer Kardinalzahl ist. Kardinalzahlen sind also Repräsentanten von Klassen gleichmächtiger Mengen. Wir brauchen für den Beweis des folgenden Satzes nur diese Eigenschaft der Kardinalzahlen.

Satz 1.5.4 *In Varietäten existiert das Tensorprodukt zu getrennt homomorphen Abbildungen.*

Beweis. Die universelle Eigenschaft fordert, daß es für *alle* getrennt homomorphen Abbildungen zu *beliebigen* Algebren aus $\mathcal{V}$ eine „Fortsetzung“ geben muß.

Wir wollen zunächst zeigen, daß es reicht, die universelle Eigenschaft für eine gewisse Teilklasse $\mathcal{K}$ von Algebren und homomorphen Abbildungen zu fordern. Wir beobachten, daß es in zwei Punkten nicht notwendig ist, die universelle Eigenschaft für *alle* Algebren der Varietät zu fordern:

- Für eine Algebra C und eine getrennt homomorphe Abbildung f betrachten wir eine Unteralgebra U mit $f(A, B) \subseteq U \leq C$. Der Homomorphismus $g : A \otimes B \to U$ kann auch als Homomorphismus $g : A \otimes B \to C$ gesehen werden. Ob die Gleichung $f = g \circ \otimes$ erfüllt ist, hängt nicht davon ab, ob g nach U oder C abbildet.

  Wir können also von $C = \langle f(A, B) \rangle_{\mathcal{V}}$ ausgehen.

- Die Trägermenge C_0 jeder Algebra der Varietät $C = (C_0, F)$ ist gleichmächtig mit einer Kardinalzahl κ, das heißt es gibt eine Bijektion $s : A \to \kappa$ und κ ist eine Kardinalzahl. Die Definition

  $$\overline{\omega}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = s(\omega(s^{-1}(\lambda_1), \ldots, s^{-1}(\lambda_n)))$$

  macht die Bijektion

  $$s : (C, F) \to (\kappa, \overline{F}) \text{ mit } \overline{F} := \{\overline{\omega} : \omega \in F\}$$

  zu einer Isomorphie. Die Algebren auf Kardinalzahlen sind Repräsentanten für die Isomorphieklassen.

  Für isomorphe Algebren $C \cong D$ mit Isomorphie r gilt: g „Fortsetzung“ zu $f \iff r \circ g$ „Fortsetzung“ zu $r \circ f$.

  Daher reicht es Algebren auf Kardinalzahlen zu betrachten.

Jetzt wollen wir die letzten zwei Punkte kombinieren. Sofort sieht man, daß $|f(A, B)| \leq |A \times B| = |A|\,|B|$ gilt, denn f ist eine surjektive Funktion von $A \times B$ nach $f(A, B)$. Jedes Element aus $\langle f(A, B) \rangle_{\mathcal{V}}$ läßt sich als Term über $f(A, B)$ schreiben, daher gilt

$$|\langle f(A, B) \rangle_{\mathcal{V}}| \leq \max(\aleph_0, |f(A, B)|) \leq \aleph_0 \cdot |f(A, B)| = \aleph_0 \cdot |A|\,|B| =: \mu$$

Wir brauchen also Algebren auf Kardinalzahlen $\leq \mu$ betrachten. Sei

$$\mathcal{K}_{A,B} := \bigcup_{\kappa \leq \mu} \bigcup_{\substack{(\kappa, F) \\ \text{Varietät}}} 2Mor(A, B; (\kappa, F)).$$

Die wesentliche Konsequenz aus den vorherigen Überlegungen ist, daß $\mathcal{K}_{A,B}$ eine Menge ist[4]. Denn $\mathcal{K}_{A,B}$ entsteht durch eine Vereinigung von Mengen. Daher können wir ein Produkt in der Varietät $\mathcal{V}$ über die Indexmenge $\mathcal{K}_{A,B}$ bilden

$$T := \prod_{f:<A,B>\to(\kappa,F)\in\mathcal{K}_{A,B}} (\kappa, F).$$

Gemeinsam mit der Abbildung

$$\begin{aligned} t :< A, B > \to & \prod_{f:<A,B>\to(\kappa,F)\in\mathcal{K}_{A,B}} (\kappa, F) \\ (a,b) \mapsto & \ (f(a,b))_{f\in\mathcal{K}_{A,B}} \end{aligned}$$

ist T ein Prätensorprodukt für A und B. Denn es gilt für jedes $f_0 :< A, B >\to (\kappa_0, F_0)$:

$$\begin{tikzcd} < A, B > \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f_0"'] & \prod_f (\kappa, F) \arrow[dl, "\pi_{f_0}"] \\ (\kappa_0, F_0) & \end{tikzcd}$$

t ist getrennt homomorph, weil jedes einzelne $f \in \mathcal{K}_{A,B}$ ein Multimorphismus ist. ■

Dieser Beweis ist nicht konstruktiv und hängt vom Auswahlaxiom ab. Man wird sich Elemente von $A\otimes B$ wohl nicht als Erzeugnis einer Abbildung $\otimes$, die in ein riesiges Produkt abbildet, vorstellen können. Für das Rechnen in $A \otimes B$ und die „Vorstellung" wird nur die universelle Eigenschaft verwendet.

Man könnte diese Situation mit Basen eines Vektorraumes vergleichen. Man zeigt einmal in einer vom Auswahlaxiom (Lemma von Zorn) abhängigen Weise, daß für jeden Vektorraum V stets eine Basis B existiert. Danach verwendet man aber nur mehr *Eigenschaften* einer Basis. Die wesentliche Eigenschaft ist hier, daß lineare Abbildung g durch Angabe der Werte auf den Basisvektoren schon eindeutig definiert ist. Dies kann man auch als universelle Eigenschaft deuten. Für jeden Vektorraum W gilt:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[dl, "\exists! g"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Der obige Beweis folgt dem Beweis des Existenzsatzes über adjungierte Funktoren von Freyd (siehe [AM75] oder [Mac98]).

[4] Wenn wir die „Vereinigung" über *alle* Algebren der Varietät genommen hätten, dann wäre dies im Allgemeinen eine echte Klasse siehe 1.2.2.

Das Tensorprodukt in Varietäten ist im allgemeinen nicht assoziativ (siehe [Fra76])

[Gal88] untersucht Beziehungen zwischen dem Tensorprodukt auf Varietäten, Unteralgebren und idempotenten Algebren.

1.5.2 Eigenschaften und Beispiele

Um auf den wesentlichen Unterschied zwischen Tensorprodukt und normalem Produkt hinzuweisen, werden wir die Abbildungen $\otimes : A, B \to A \otimes B$ und $\times : A, B \to A \times B$ miteinander vergleichen.

Nach Definition ist $\otimes(\bullet, y)$ ein Homomorphismus *für alle* y. Aber auch $\times(\bullet, y)$ *kann* ein Homomorphismus sein. Betrachten wir zwei Algebren A und B mit einer Operation, $\Omega := \{\ulcorner + \urcorner\}$. Dann gilt in der Produktalgebra $A \times B$

$$(x_1, y) + (x_2, y) = (x_1 + x_2, y + y),$$

weil im Produktraum die Operationen komponentenweise definiert sind. Wenn jetzt $y \in B$ idempotent ist, also $y + y = y$, dann gilt $(x_1, y) + (x_2, y) = (x_1 + x_2, y)$. Das ist aber nichts anderes als die Homomorphieeigenschaft. Damit haben wir schon ein konkretes Beispiel für ein Tensorprodukt:

Beispiel 1.5.5 *Ein* Halbverband *ist eine partielle Ordnung, in der zu je zwei Elementen a und b immer ein Supremum $a \cup b$ existiert. Wir können die Klasse aller Halbverbände als Klasse von universellen Algebren mit einer Operation $\cup$ sehen.*

$A \times B$ ist das Tensorprodukt in der Klasse der Halbverbände (mit getrennt homomorphen Funktionen als Multimorphismen). Hier gilt nämlich $x \cup x = x$.

Eine Abbildung ist ein 2Morphismus $\varphi :< A, B > \to C$, wenn

$$\varphi(x_1 \cup x_2, y) = \varphi(x_1, y) \cup \varphi(x_2, y) \text{ und } \varphi(x, y_1 \cup y_2) = \varphi(x, y_1) \cup \varphi(x, y_2)$$

gilt. Wegen $y = y \cup y$ und $x \cup x = x$ kann man φ auch als Homomorphismus $\varphi : A \times B \to C$ ansehen.

Meistens werden aber nicht alle $y \in B$ idempotent sein. Viele Klassen von Algebren mit einer zweistelligen Operation haben ein „neutrales“ Element e, das idempotent ist. Bei Monoiden ist $\times(\bullet, e)$ ein Homomorphismus. Im allgemeinen ist dagegen $\times(\bullet, y)$ kein Homomorphismus für jedes beliebiges Element y, diese Eigenschaft hat nur das Tensorprodukt.

Wenn wir mehrere Operationen betrachten, wird die Lage um einiges komplizierter. Um diese zusätzliche Schwierigkeit zu veranschaulichen, nehmen wir zwei Operationen, wir nennen sie $+$ und $\cdot$. Um Klammern zu sparen, vereinbaren wir wie üblich, daß $\cdot$ die höhere Priorität hat. Dann muß einerseits

$$(x_1 + x_2) \otimes (y_1 \cdot y_2) = x_1 \otimes (y_1 \cdot y_2) + x_2 \otimes (y_1 \cdot y_2) = x_1 \otimes y_1 \cdot x_1 \otimes y_2 + x_2 \otimes y_1 \cdot x_2 \otimes y_2$$

und andererseits

$$(x_1 + x_2) \otimes (y_1 \cdot y_2) =$$
$$(x_1 + x_2) \otimes y_1 \cdot (x_1 + x_2) \otimes y_2 = (x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_1) \cdot (x_1 \otimes y_2 + x_2 \otimes y_2)$$

gelten.

Also muß auf dem Tensorprodukt $A \otimes B$ die Regel $a \cdot b + c \cdot d = (a + c) \cdot (b + d)$ erfüllt sein. Bei Ringen z.B. bedeutet dies $A \otimes B = \{0\}$. Man beachte, daß die Multimorphismen immer noch getrennt homomorphe Abbildungen sind. Nur die Nullabbildung ist eine getrennt homomorphe Abbildung bei Ringen. Mit einer anderen Wahl der Multimorphismen gibt es sehr wohl ein Tensorprodukt in der Kategorie der Ringe $\neq \{0\}$.

Wenn wir die Regel $a \cdot b + c \cdot d = (a + c) \cdot (b + d)$ auf beliebige Operationen verallgemeinern, dann bekommen wir

Definition 1.5.6 *Eine Algebra (A, Ω) erfüllt die* Verträglichkeitsbedingung $\Longleftrightarrow$ *für je zwei Operationen ω (m-stellig, als Spalten geschrieben) und ν (n-stellig, als Zeilen geschrieben) aus Ω gilt:*

$$\omega \begin{pmatrix} \nu(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n) \\ \nu(a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n) \\ \cdots \\ \nu(a_m^1, a_m^2, \ldots, a_m^n) \end{pmatrix} = \nu \left(\omega \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \cdots \\ a_m^1 \end{pmatrix}, \omega \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \cdots \\ a_m^2 \end{pmatrix}, \ldots, \omega \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \cdots \\ a_m^n \end{pmatrix} \right)$$

Lemma 1.5.7 *Auf $A \otimes B$ muß die Verträglichkeitsbedingung erfüllt sein.*

Beispiel 1.5.8 *Man kann $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{K}}$, die Vektorräume über einem fixen Körper $\mathbb{K}$, als Klasse universeller Algebren $(V, +, 0, (\lambda_k)_{k \in \mathbb{K}})$ auffassen. λ_k ist dabei die Skalarmultiplikation mit $k \in \mathbb{K}$, also eine einstellige Operation.*

Die Verträglichkeitsbedingung fordert dann: $\lambda_k(a + b) = \lambda_k(a) + \lambda_k(b)$, $\lambda_k(\lambda_l(a)) = \lambda_l(\lambda_k(a))$, $0 = 0 + 0$ und $\lambda_k(0) = 0$ für je zwei verschiedene Operationen; $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$ und zwei triviale Gleichungen für zwei gleiche Operationen. Also erfüllt jeder Vektorraum die Verträglichkeitsbedingung.

1.6 Tensorprodukt auf Vektorräumen

Der Begriff des Tensorprodukts hat seinen Ursprung in der Kategorie der Vektorräume. Hier betrachten wir multilineare Abbildungen als Multimorphismen. Es folgt jetzt die klassische Konstruktion der Existenz des Tensorprodukts.

Zunächst brauchen wir den Begriff des *frei erzeugten* Vektorraums F über einer Menge X.

Sei $F'(X) = \{f : X \to \mathbb{K}, \text{ nur endlich viele } f(x) \neq 0\}$ die Menge *aller* Funktionen von X nach $\mathbb{K}$ mit endlichem Träger. Mit der punktweisen Definition der Operationen bildet $F'(X)$ einen Vektorraum, den Vektorraum, der frei von X erzeugt ist. Eine Basis bilden die Funktionen

$$\left\{ m_y : \left\{ \begin{array}{ll} y \mapsto 1 & \\ x \mapsto 0 & sonst \end{array} \right. \middle| y \in X \right\}$$

Also ist die Dimension dieses Vektorraums $|X|$.

Man kann dies auch anders sehen. $F'(X)$ ist nur eine Hilfskonstruktion, um mit „einfachen Mitteln“ zu sehen, daß es immer so einen Vektorraum gibt. Wir können aber auch einfach sagen: *Alle* Elemente $x \in X$ zusammen bilden eine Basis $B = X$ von $F'(X) = [X]$.

Zur Konstruktion des Tensorprodukts bilden wir nun als erstes $F'(V \times W)$. Oder wir nehmen die ganze Menge $V \times W$ als Basis von F. Damit wir den von der Menge $V \times W$ frei erzeugten Vektorraum nicht mit dem Vektorraum $V \times W$ verwechseln, ändern wir die Notation:

$$\ulcorner x \otimes y \urcorner := (x, y) = m_{(x,y)}$$

Nur zur Unterscheidung von Elementen aus $V \otimes W$ schreiben wir die Halbeckklammer $\ulcorner\urcorner$. Diese „formalen Terme“ $\ulcorner x \otimes y \urcorner$ bilden also eine *Basis* des Vektorraum F ($\Rightarrow$ $\dim F = |V| \cdot |W|$)

$$F := [\ulcorner x \otimes y \urcorner : x \in V, y \in W]$$

Nun hier ist $\otimes : V \times W \to F$, $(x, y) \to \ulcorner x \otimes y \urcorner$ keine bilineare Abbildung. Um die Bilinearität zu erreichen, faktorisieren wir einfach durch einen Unterraum U, der von den Bilinearitätsgesetzen „erzeugt“ wird. $V \otimes W = F/U$, mit $U := [X]$ und

$$\begin{aligned} X := \{&\ulcorner x \otimes (y_1 + y_2)\urcorner - \ulcorner x \otimes y_1 \urcorner - \ulcorner x \otimes y_2 \urcorner : x \in V, y_1, y_2 \in W\} \cup \\ &\{\ulcorner (x_1 + x_2) \otimes y)\urcorner - \ulcorner x_1 \otimes y \urcorner - \ulcorner x_2 \otimes y \urcorner : x_1, x_2 \in V, y \in W\} \cup \\ &\{\lambda(\ulcorner x \otimes y \urcorner) - \ulcorner (\lambda x) \otimes y \urcorner : \lambda \in \mathbb{K}\} \cup \{\lambda(\ulcorner x \otimes y \urcorner) - \ulcorner x \otimes (\lambda y)\urcorner : \lambda \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir das Tensorprodukt in der Kategorie der Vektorräume zu multilinearen Abbildungen. Man bekommt eine bessere Vorstellung dieses Vektorraums, wenn man eine Basis kennt.

Lemma 1.6.1 *Wenn $\{a_i : i \in I\}$ bzw. $\{b_j : j \in J\}$ Basen von V bzw. W sind, dann ist*

$$\{a_i \otimes b_j : i \in I, j \in J\}$$

ist eine Basis von $V \otimes W$. Insbesondere hat $V \otimes W$ die Dimension $\dim V \cdot \dim W$.

Beweis. Es sei $x := \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{ij}\cdot(a_i \otimes b_j)$ mit $\{\alpha_{ij}\neq 0 : (i,j)\in I\times J\}$ endlich. Wir wenden das folgende Lemma 1.6.2 auf $x_j := \sum_{i\in I}\alpha_{ij}\cdot a_i$ an.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{ij}\cdot(a_i\otimes b_j) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}\alpha_{ij}\cdot a_i\right)\otimes b_j = 0 \Rightarrow \alpha_{ij} = 0,$$

also $\{a_i\otimes b_j : i\in I, j\in J\}$ eine linear unabhängige Menge. Es ist klar, daß diese Menge alle Vektoren $x\otimes y$ erzeugen, diese wiederum erzeugen $V\otimes W$, weil die Menge $\{\ulcorner x\otimes y\urcorner : x\in V, y\in W\}$ ganz F erzeugt. ■

Lemma 1.6.2 *Sei $\{b_j : j\in J\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von W. Dann gilt*

$$\sum_{j\in J} x_j\otimes b_j = 0 \iff x_j = 0\ \forall j\in J.$$

Beweis. *Wir wenden auf $0 = \sum x_j\otimes b_j \in V\otimes W$ die universelle Fortsetzung von*

$$l_\xi : V\times W\to W : (x,y)\mapsto \xi(x)\cdot y$$

für $\xi\in V^*$ an. Aus $0 = \sum \xi(x_j)\cdot b_j$ folgt $\xi(x) = 0$ für alle $\xi\in V^*$ und damit $x = 0$. ■

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Existenz des Tensorprodukts zweier Vektorräume zu zeigen:

- Mit Hilfe des Existenzsatzes aus dem letzten Abschnitt:

  Für jeden fixen Körper $\mathbb{K}$ bildet $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{K}}$ eine Klasse universeller Algebren. Die Signatur $\Omega = \{\ulcorner +\urcorner, \ulcorner 0\urcorner, (\ulcorner\lambda_k\urcorner)_{k\in\mathbb{K}}\}$ ist abhängig von $\mathbb{K}$ und im allgemeinen nicht endlich. Außerdem benötigen wir auch $|\mathbb{K}|$ Gleichungen, um $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{K}}$ zu charakterisieren. Wir können daher den Existenzsatz nicht direkt anwenden. Bei genauer Untersuchung stellt sich aber heraus, daß alle Beweisschritte auch bei Vektorräumen anwendbar sind, z.B gilt $\left|\langle f(V,W)\rangle_{\mathfrak{Vect}_{\mathbb{K}}}\right| = |[f(V,W)]| \leq |V|\,|W|$.

- Wir können $V\otimes W$ als Unterraum von $B(V,W)^*$ sehen. Denn mit $(V\otimes W)^* = B(V,W)$ folgt $V\otimes W \leq (V\otimes W)^{**} \leq B(V,W)^*$. Wir kommen in 3.3.2 darauf zurück.

- Man kann das Tensorprodukt natürlich auch direkt über Basen einführen

  $$\begin{aligned} V\otimes W &:= [\{\ulcorner a_i\otimes b_j\urcorner : (i,j)\in I\times J\}] \\ &\qquad \text{mit } \{a_i : i\in I\} \text{ Basis von } V \text{ bzw. } \{b_j : j\in J\} \text{ Basis von } W \end{aligned}$$

  Dazu müßte man aber auch noch zeigen, daß die evidente Abbildung $\otimes$ unabhängig von der Wahl der Basis ist.

- Konstruktion F/U aus dem Anfang des Abschnittes.

Wir bilden nun aus $f : V_1 \to W_1$ und $g : V_2 \to W_2$ $f \otimes g : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$. Die folgende Eigenschaft werden wir später brauchen:

Lemma 1.6.3 *f und g injektiv $\Rightarrow f \otimes g$ injektiv.*

Beweis. Wenn $\{y_j : j \in J\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von W_1 ist, dann ist auch $\{g(y_j) : j \in J\} \subseteq W_2$ linear unabhängig weil f injektiv ist. Sei $z = \sum_{j \in J} x_j \otimes y_j$ (J endlich), dann ist aufgrund von Lemma 1.6.2

$$(f \otimes g)(z) = 0. \Longleftrightarrow f(x_j) = 0 \Rightarrow x_j = 0 \Rightarrow z = 0$$

■

Man sieht sofort, daß $\mathbb{K} \otimes V = V \otimes \mathbb{K} = V$ gilt. Auch das Assoziativitätsgesetz ist erfüllt:

Lemma 1.6.4 *Für das Tensorprodukt in Vektorräumen gilt:*

$$V \otimes W \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U.$$

Beweis. Wir überprüfen die zwei Bedingungen aus 1.4.3. Eine multilineare Abbildung ist bei Festhalten eines Arguments bilinear, also ist $\varphi_z = \varphi(\bullet, \bullet, z)$ bilinear. Aufgrund von

$$f(\sum x_i \otimes y_i, z) = \sum f_z(x_i \otimes y_i) = \sum \varphi(x_i, y_i, z)$$

ist f auch in der zweiten Variablen linear, also bilinear. ■

Daher bildet $(\mathfrak{Vect}_{\mathbb{K}}, \otimes, \mathbb{K})$ eine symmetrische monoidale Kategorie.

Kapitel 2

Topologische Vektorräume

2.1 Grundlagen

Ein topologischer Vektorraum besteht aus einem Vektorraum und einer „verträglichen“ Topologie, er ist eine Verallgemeinerung eines normierten Raumes.

Da der algebraische Teil (Vektorraum) wohlbekannt ist, beschäftigen wir uns mit der topologischen Struktur.

Den Begriff einer Topologie kann man auf (zumindest) zwei Arten einführen.

Üblicherweise wird das Mengensystem der offenen Teilmengen angegeben, wir werden aber in diesem Zusammenhang mit einem System von Umgebungfiltern arbeiten, weil dies besser zu der Struktur eines Vektorraums paßt.

2.1.1 Filter und Umgebungsfilter

Definition 2.1.1 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ *ist ein* Filter *auf* $A \iff$

1. *$\mathcal{F}$ ist durchschnittsstabil, das heißt, der Durchschnitt zweier Filtermengen gehört stets zum Filter.*
2. *$\mathcal{F}$ ist oben abgeschlossen, das heißt, jede Obermenge einer Filtermenge ist eine Filtermenge.*

Oft fügt man zu der Definition eines Filters noch $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(A)$ oder $\emptyset \notin \mathcal{F}$ hinzu, wir wollen hingegen Filter, die nicht gleich der Potenzmenge sind, *echte Filter* nennen.

Ein Beispiel für einen Filter bilden alle Obermengen einer fixen Menge M, das ist ein echter Filter für $M \neq \emptyset$. Dieser Filter heißt Hauptfilter von M, und dieser Name deutet schon an, daß nicht alle Filter dieser Bauart sind. Betrachten wir alle endlichen Teilmengen E einer fixen unendlichen Menge R. Die Komplemente $R \backslash E$ bilden einen Filter, den Filter der koendlichen Mengen.

Ein weiterer Filter, der keinen Hauptfilter darstellt, ist der Filter aller Umgebungen von $0 \in \mathbb{R}$: $\mathcal{U} = \left\{X : X \supseteq [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\right\}$. Das ist das erste Beispiel für einen Umgebungsfilter (=filter of neighborhood).

Für die Definition einer Topologie auf einer Menge E braucht man in jedem Punkt $x \in E$ einen Filter $\mathcal{U}_{(x)} \subseteq \mathcal{P}(A)$, den Umgebungsfilter von x. Dieser muß aber noch zwei zusätzliche Eigenschaften erfüllen:

- x muß in jeder Menge $U \in \mathcal{U}_{(x)}$ enthalten sein,
- alle Filter müssen zusammenpassen, das heißt

$$\forall U \in \mathcal{U}_{(x)} \exists V \in \mathcal{U}_{(x)} : y \in V \Rightarrow U \in \mathcal{U}_{(y)}.$$

  oder informell ausgedrückt: Jede Umgebung von x ist auch für jedes geeignet nahe y eine Umgebung.

Eine Menge heißt nun *offen*, wenn mit jedem Punkt auch eine Umgebung dieses Punktes in der Menge liegt. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß diese Definition einer Topologie zu der üblichen mit der Angabe von offenen Mengen äquivalent ist. Wir bezeichnen eine Topologie mit $\mathcal{T}$, es ist egal, ob man darunter ein System von offenen Mengen oder eine System $\left\{\mathcal{U}_{(x)} : x \in E\right\}$ von Umgebungen versteht.

Wir können aus einem durchschnittsstabile System von Mengen leicht einen Filter konstruieren: Wir nehmen einfach alle Obermengen. Das durchschnittsstabilen System heißt dann *Basis des Filters*. Also bilden zum Beispiel alle Intervalle $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ eine Basis des Umgebungsfilters von $0 \in \mathbb{R}$

Eine Topologie $\mathcal{T}$ ist *feiner* (=schwächer) als $\mathcal{T}_0$, wenn sie mehr offene Mengen, oder dazu äquivalent, mehr Umgebungen enthält. Je feiner eine Topologie $\mathcal{T}$ ist, desto mehr stetige Abbildungen ausgehend von $\mathcal{T}$ und desto weniger stetige Abbildungen nach $\mathcal{T}$ gibt es. Die feinste Topologie ist die diskrete Topologie $\mathcal{P}(E)$, die ist aber nicht sehr interessant. Wichtiger ist die feinste Topologie unter einer Zusatzvoraussetzung, vor allem die feinste Topologie $\mathcal{T}^*$, so daß $f : (E, \mathcal{T}_0) \to (F, \mathcal{T}^*)$ stetig ist. Diese ist durch

$$\mathcal{T}^* := \bigcap \{\mathcal{T} : f : (E, \mathcal{T}_0) \to (F, \mathcal{T}\ ) \text{ stetig}\}$$

gegeben, weil der Durchschnitt von Topologien wieder eine Topologie ist (genauso der Durchschnitt von Umgebungsbasen von x ist wieder eine Umgebungsbasis von x).

2.1.2 Topologische Vektorräume

Wir brauchen auch auf dem Körper des Vektorraums eine topologische Struktur. Man könnte einiges der Theorie auch mit allgemeinen topologischen Körpern $\mathbb{K}$ machen, wir nehmen aber $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, die komplexen Zahlen mit der (in dem Zusammenhang einzig sinnvollen) üblichen Topologie.

Damit die folgenden Aussagen schneller und intuitiver lesbar sind, wollen wir ein paar praktische Notationen einführen:

- $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ ist die Einheitskreisscheibe (=**d**isk)
- Oft wollen wir alle Vielfachen eines Punktes oder eine Ausdehnung einer Menge betrachten. Dazu führen wir die Notation des Produktes einer Menge mit einem Skalar ein.

  Für $A \subseteq E$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Also bezeichnet $\lambda\mathbb{D}$ eine Kreisscheibe. Alle diese Kreisscheiben $\lambda\mathbb{D}$ mit Radius $\lambda \in \mathbb{R}^+$ bilden eine Umgebungsbasis von $0 \in \mathbb{C}$.
- In ähnlicher Weise ist die Summe von zwei Mengen als

  $$W + V := \{x + y : x \in W \wedge y \in V\}$$

  definiert. Wir beachten, daß $W + W$ nicht gleich $2W$ ist.
- Unter $\mathbb{D}W$ schließlich verstehen wir die Menge $\{\lambda x : x \in W \wedge \lambda \in \mathbb{D}\}$.

Der wesentliche Vorteil dieser Notation ist, daß man sich die Angabe eines Allquantors spart. Unsere Intuition in dieser Notation können wir gleich an Hand von zwei Begriffen testen. Wir werden sie in Kürze brauchen.

Definition 2.1.2 *Sei E ein Vektorraum und $U \subseteq E$*

1. *U heißt* absorbierend $\Longleftrightarrow \forall x \in E\ \exists c > 0 : c\mathbb{D}x \subseteq U$
   oder anders ausgedrückt $\forall x \in E\ \exists c > 0 : \forall \lambda : |\lambda| \leq c : \lambda x \in U$
2. *U heißt* kreisförmig *(=circled, balanced)* $\Longleftrightarrow \mathbb{D}U = U$
   oder in klassischer Form $\forall u \in U, \forall \lambda : |\lambda| \leq 1 : \lambda u \in U$

Jetzt können wir endlich mit der Definition eines topologischen Vektorraums beginnen.

Durch die lineare Struktur reicht es, wenn wir $\mathcal{U}_{(0)}$, eine Umgebungsbasis von 0 angeben, $\mathcal{U}_{(x)}$ wird als $\mathcal{U}_{(x)} := \left\{U + x : U \in \mathcal{U}_{(0)}\right\}$ definiert. Wir sprechen auch kurz von einer Umgebungsbasis $\mathcal{U}$, wenn wir eine Umgebungsbasis von 0 meinen. Nun brauchen wir noch Axiome, welche die Verträglichkeit von $\mathcal{U}$ mit der linearen Struktur beschreiben.

Wir werden drei verschiedene Herangehensweisen anführen, die sich gleich anschließend als äquivalent herausstellen werden.

Definition 2.1.3 *Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{U}$ ein Filter auf E und $\mathcal{U}_{(x)} := \{U + x : U \in \mathcal{U}\}$.*

$(E, \mathcal{U}_{(x)})$ *heißt* topologischer Vektorraum, *wenn eine der äquivalenten Bedingungen –A–,–B– oder –C– erfüllt ist.*

–A– *1)* $+ : E \times E \to E$ *ist stetig*

2) $\bullet : \mathbb{K} \times E \to E$ *ist stetig*

–B– $\forall\, U \in \mathcal{U}$

1) $\exists\, V \in \mathcal{U} \ : V + V \subseteq U$

2) $\forall\, (\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E$
$\exists\, \delta > 0,\ V \in \mathcal{U} \ : (\delta\mathbb{D}{+}\lambda)(V + x) \subseteq U + \lambda x$

–C– $\forall U \in \mathcal{U}$

1) $\exists\, V \in \mathcal{U} : V + V \subseteq U$

2) $\forall\, \mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \mu U \in \mathcal{U}$

3) U *ist absorbierend*

4) $\exists\, V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subseteq U$, *das heißt es gibt eine kreisförmige Teilmenge, die in $\mathcal{U}$ liegt.*

Beweis der Äquivalenz.

$\boxed{A \Leftrightarrow B}$ Einfache Umformulierung des Begriffs der Stetigkeit.

$\boxed{B \Rightarrow C}$ Wir betrachten die Stetigkeit der Multiplikation mit einem Skalar im Punkt $(0, 0)$, wobei $x := 0$ fix ist, und λ nahe bei Null variiert. Da die Aussage –B–(2) für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt (siehe Definition des Produktes mit Mengen) gilt sie auch für $z := 0$. Wenn wir das alles einsetzen, bleibt jetzt nur noch $\lambda V \subseteq U$ übrig. Das bedeutet aber $\frac{1}{\lambda}U \in \mathcal{U}$. Wir starten also mit $\lambda := \frac{1}{\mu}$ um das Ergebnis zu erhalten.

Für (3) setzen wir $\lambda := 0$. Der Ursprung 0 liegt in V, das ist einfach zu sehen ($(\lambda, x) = (0, 0)$, $0 \in \mathbb{D}$). Genauso wie bei (2) wählen wir $z := 0 \in V$. Übrig bleibt daher $\delta\mathbb{D}x \subseteq U$, also ist U absorbierend.

Schließlich setzen wir $\lambda := 0$, $x := 0$, dann ist $\delta\mathbb{D}V$ eine kreisförmige Teilmenge.

$\boxed{C \Rightarrow B}$ Wir nehmen eine kreisförmige Menge W für die $W + W + W \subseteq U$ gilt, diese existiert durch doppelte Anwendung von (1) und dann (4).

W ist absorbierend (3) $\Rightarrow \exists c > 0 : c\mathbb{D}x \subseteq W$, wir setzen gleich $\delta := c$. Wir definieren nun $V := \varrho W$. Nun bestimmen wir ϱ so, daß λV und $\delta\mathbb{D}V$ in W liegen. Man erreicht dies durch Ausnützung der Kreisförmigkeit von W mit $\varrho := \max(1/\lambda, 1/\delta)$. Daher gilt

$$(\delta\mathbb{D}{+}\lambda)(V + x) \subseteq \delta\mathbb{D}V + \lambda V + \delta\mathbb{D}x + \lambda x \subseteq W + W + W + \lambda x \subseteq U + \lambda x$$

■

Eine Topologie, die einen Vektorraum V zu einem topologischen Vektorraum macht, heißt auch *lineare Topologie*. Auf jedem Unterraum $G \leq E$ wird eine Topologie induziert, einfach durch $\mathcal{U} \cap G := \{U \cap G : U \in \mathcal{U}\}$.

Genauso ist jeder Faktorraum $E \xrightarrow{\kappa} E/M$ ein topologischer Vektorraum mit der Quotiententopologie $\kappa(\mathcal{U}) := \{\kappa(U) : U \in \mathcal{U}\}$.

Einige Begriffe, die aus der Theorie der topologischen Räume und normierten Räume bekannt sind, lassen sich leicht in topologischen Vektorräumen schreiben:

Definition 2.1.4 *B ist* beschränkt $\iff \forall\ U \in \mathcal{U}\ \exists \lambda : B \subseteq \lambda U$

Definition 2.1.5 *Ein topologischer Raum E ist ein* Hausdorffraum *(andere Notation T2-Raum), wenn wir je zwei Punkte durch Umgebungen trennen können.*

Im Falle topologischer Vektorräume kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen der Punkte gleich 0 setzen. Außerdem vereinfacht sich die Hausdorffeigenschaft zu

$$\forall x\ \exists U \in \mathcal{U} : x \notin U.$$

Denn 0 und x können wir mit V und $V+x$, wobei $V-V \subseteq U$ ist, von einander trennen. Wenn nämlich $v_1 = v_2 + x$ im Durchschnitt von V und $V + x$ liegt, dann muß $x \in U$ sein:

$$x = v_1 - v_2 \in V - V \subseteq U$$

Definition 2.1.6 *Mit $LC(E, F) \subseteq L(E, F)$ bezeichnen wir alle stetigen linearen Abbildungen von E nach F.*

Bei vielen Erweiterungen von endlichdimensionalen Ergebnissen werden wir den algebraischen Dualraum $E^* := L(E, \mathbb{C})$ durch den topologischen Dualraum $E' := LC(E, \mathbb{C})$ ersetzen.

Das nächste Lemma zeigt uns, daß dies ist eine echte Verallgemeinerung ist.

Lemma 2.1.7 *Seien E und F Hausdorffsch und endlichdimensional. Dann gilt $E \cong \mathbb{C}^{\dim E}, LC(E, F) = L(E, F)$ und $E' = E^*$ oder mit anderen Worten: Die einzige verträgliche T2-Topologie auf endlichdimensionalen Räumen ist die Standardtopologie von $\mathbb{C}^{\dim E}$.*

Beweis. *Den Beweis, wie zu erwarten eine Induktion, findet man z.B. in [Tre70, Th. 9.1].* ■

Die Hausdorffeigenschaft wird öfter als Voraussetzung in Sätzen auftreten, jedesmal geht diese Eigenschaft in den Beweisen dann ein, wenn man endlichdimensionale Unterräume braucht.

Es gibt topologische Vektorräume $E \neq \{0\}$, deren einziges stetiges Funktional das Nullfunktional ist. In [Jar81, 6.10K, p. 123] findet sich das Beispiel $\mathcal{L}_p([0,1])$, $p \in (0,1)$. In solchen Räumen können wir wohl keine sinnvolle Dualitätstheorie aufbauen. In *lokalkonvexen* topologischen Vektorräumen mit T2 ist das anders. Hier gibt es immer „genug" lineare stetige Funktionale.

2.1.3 Lokalkonvexe topologische Vektorräume

Lokalkonvexe topologische Vektorräume bilden die Verbindung zwischen allgemeinen topologischen Vektorräumen und normierten Räumen. Wir können auf diesen Räumen sogenannte Halbnormen definieren.

Der bekannte Begriff der Konvexität ist schnell in Mengenschreibweise dargestellt:

Definition 2.1.8 $K \subseteq E$ konvex $\iff \alpha K + \beta K \subseteq K$ *für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$ *und* $\alpha + \beta = 1$.

Die konvexe Hülle $\Gamma(A)$ *von* A *ist die kleinste konvexe Menge, die* A *umfaßt. Sie besteht aus der Menge aller (endlichen) Konvexkombinationen, das heißt*

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Definition 2.1.9 *Ein topologischer Vektorraum* E *heißt* lokalkonvex*, wenn es eine Umgebungsfilterbasis bestehend aus konvexen Mengen gibt. Wir schreiben auch kurz* lokalkonvexer Vektorraum *für* lokalkonvexer topologischer Vektorraum*.*

$\mathfrak{lcVect}$ *ist die Kategorie der lokalkonvexen Vektorräume und stetigen Funktionen.*

Definition 2.1.10 *Eine* Halbnorm p *ist eine Funktion* $E \to [0, \infty)$ *mit*

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
2. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$

   Normen sind also Halbnormen mit $\ker p = \{0\}$.

Eine Halbnorm soll, ähnlich wie eine Norm, eine Art Abstand messen. Wir nehmen eine schöne Menge U, genauer sie soll kreisförmig, absorbierend und konvex sein. Dann messen wir um wie viel wir U aufblasen müssen, um $x \in E$ zu erreichen, also $q_U(x) := \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda U\}$. Dieser Maßstab (=gauge) ist eine Halbnorm. Umgekehrt ist $K_q := \{x : q(x) \leq 1\}$ eine kreisförmige, absorbierende und konvexe Menge, falls q eine Halbnorm ist.

Aus jedem Umgebungssystem können wir eine Umgebungsbasis aus schönen Mengen auswählen. Leicht zu sehen ist, daß q_U stetig ist $\iff U \in \mathcal{U}$.

Jede Umgebungsbasis definiert ein System von stetigen Halbnormen. Umgekehrt können wir die Axiome für eine Umgebungsbasis auf Halbnormen umschreiben und bekommen so den Begriff einer Basis von stetigen Halbnormen. Jede solche Basis definiert eine Umgebungsbasis von 0.

Wir werden diese Charakterisierung über Halbnormen in dieser Arbeit nur einmal benötigen. Der Grund, warum lokalkonvexe Räume dauernd auftreten werden, ist ein anderer.

Auf lokalkonvexen Räumen lebt[1] der Satz von HAHN-BANACH, der klassische Satz der Funktionalanalysis über die Fortsetzung von Funktionalen.

Satz 2.1.11 (Hahn-Banach) .

1. *Sei p eine Halbnorm auf einem Vektorraum E und $M \leq E$ ein Unterraum. Jede Linearform η*
$$\eta \in M^* \text{ mit } |\eta(x)| \leq p(x)$$
läßt sich zu einer Linearform ξ
$$\xi \in E^* \text{ mit } |\xi(x)| \leq p(x)$$
fortsetzen.
2. *Sei E ein lokalkonvexer Vektorraum und $M \leq E$. Dann läßt sich jedes $\eta \in M'$ zu einem $\xi \in E'$ fortsetzen*[2].

Wir werden drei wichtige Folgerungen verwenden:

Korollar 2.1.12 *Sei $M \leq E$ ein* abgeschlossener *Teilraum, $x \in E \backslash M$. Dann existiert ein $\xi \in E'$ mit $\xi|_M = 0$, $\xi(x) = 1$.*

In diesem Korollar beachte man vor allem die Voraussetzung eines abgeschlossenen Teilraumes.

Ausgehend von einer Basis auf E kann man immer eine duale Basis auf E^*. Die Vektoren der dualen Basis sind linearen Funktionale. In einem allgemeinen topologischen Vektorraum müssen diese linearen Funktionale aber nicht stetig sein. E' könnte sogar nulldimensional sein.

Im Falle eines T2 Raumes können wir aber eine Menge von stetigen Linearformen aus E' erzeugen, die eine ähnliche Eigenschaft wie die duale Basis hat.

---

[1] Unter „...lebt auf“ verstehen wir, daß der Satz oder die Eigenschaft seine größte mögliche (sinnvolle) Allgemeinheit in dieser Theorie hat.

[2] 1 ist ein Spezialfall 2 mit $\{p\}$ als Basis von stetigen Halbnormen. Umgekehrt kann man aus 1 leicht 2 ableiten.

Endlichdimensionale Unterräume eines topologischen Vektorraums mit T2 sind isomorph zu $\mathbb{C}^r$ und daher abgeschlossen. Sei $\{b_i : i \in I\}$ eine Basis von E. Wir setzen für fixes $i \in \{1, \dots, r\} : M_i := [b_1, \dots, \cancel{b_i}, \dots, b_r]$ und $x_i := b_i$. Dann existiert je ein $\zeta^i \in F'$ mit

$$\zeta^i(b_k) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases},$$

also $\zeta^i(b_k) = \delta^i_k$. Außerhalb von $[b_1, \dots, b_r]$ können wir jedoch keine Aussage über das Verhalten von ζ^i machen.

Mit diesen „pseudodualen“ Basis folgt schnell:

Korollar 2.1.13 *Sei E Hausdorffsch und lokalkonvex. Dann gilt*

$$(\xi(x) = 0 \text{ für alle } \xi \in E') \Rightarrow x = 0.$$

Mit anderen Worten: $\langle \cdot, \cdot \rangle \in B(E', E)$ ist nicht ausgeartet.

Korollar 2.1.14 *Sei E ein normierter Raum und $x_0 \in E$. Dann gibt es ein $\xi \in E'$ mit $\xi(x_0) = \|x_0\|$ und $\xi(x) \leq \|x\| \ \forall x \in E$.*

2.2 Gleichmäßige Stetigkeit und Topologien auf dem Dualraum

2.2.1 Topologien auf LC

Nun wollen wir auf dem Dualraum E' eine Topologie definieren. Dazu benötigen wir den Begriff des Polaren A° einer Menge A:

$$A^\circ := \{\xi \in E' : |\langle \xi, a \rangle| \leq 1 \ \forall a \in A\} = \{\xi : \xi(A) \subseteq \mathbb{D}\} = \bigcap_{a \in A} a^{-1}(\mathbb{D})$$ [3]

Wenn $M \leq E$ ein Unterraum ist, so wird M° zu

$$M^\circ = \{\xi \in E' : \langle \xi, a \rangle = 0 \ \forall a \in M\} = \{\xi \in E' : \xi|_M = 0\}.$$

Wir müssen nur $a = nb$ setzen und n gegen ∞ laufen lassen. Das Polar ist also das Äquivalent zum Annullatorraum in endlichdimensionalen Räumen.

Weitere leicht überprüfbare Eigenschaften des Polars:

- A° ist konvex und kreisförmig.

[3] a^{-1} bezeichne das Inverse der Funktion $a{:}A^* \to \mathbb{K}$, wobei A in A^{**} eingebettet wird. Diese Schreibweise werden wir aber im folgenden nicht verwenden.

- Wir können dual für Teilmengen B des Dualraums E' eine das Antipolar $B^\bullet := \{x \in E : |\langle \beta, x\rangle| \leq 1 \; \forall \beta \in B\}$ definieren. $\circ$ und $\bullet$ bilden dann eine *Galoisverbindung*, das heißt:
  - $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1^\circ \supseteq A_2^\circ$
  - $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1^\bullet \supseteq B_2^\bullet$
  - $A \subseteq A^{\circ\bullet}$, $B \subseteq B^{\bullet\circ}$
- $(\varrho A)^\circ = \frac{1}{\varrho} A^\circ$ für $\varrho \in \mathbb{R}^+$
- $[A]^\circ \leq A^\circ$

Betrachten wir jetzt wieder allgemeiner $LC(E, F)$. Wir werden die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten bzw. kompakten, konvex kompakten,... Mengen einführen. Der Konvergenzbegriff unserer neuen Topologie wird genau der gleichmäßigen Konvergenz auf einem Mengensystem entsprechen. Wir können aber nicht jede beliebige Mengenfamilie nehmen:

Definition 2.2.1 *Ein Mengensystem $\mathcal{B}$ heißt* Bornologie$\Longleftrightarrow$

1. *$\mathcal{B}$ ist Teilmenge der Menge der beschränkten Mengen*
2. *$A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{B} : A \cup B \subseteq C$*
3. *$A \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{B} : \lambda A \subseteq C$*

Jetzt schauen wir uns die Definition der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge $f_n \in LC(E, F)$ gegen 0 an:

$$\begin{array}{lll} \forall B \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{V} & \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 & \forall b \in B : f_n(b) \in V \\ & \quad\text{oder} & \\ \forall (B, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{V} & \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 & : f_n \in \{f : f(B) \subseteq V\} =: U(B, V) \end{array}$$

Also werden wir die eben definierten Mengen $U(B, V)$ mit $B \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{V}$ als Basis für unsere Topologie verwenden. Doch erst müssen wir überprüfen, daß es sich dabei tatsächlich um eine Umgebungsbasis für eine verträgliche Topologie handelt:

Die meisten der Punkte der Umgebungsbasiskriterien folgen unmittelbar. Interessant ist nur, ob $U(B, V)$ absorbierend ist.

Lemma 2.2.2 *$U(B, V)$ absorbierend $\Longleftrightarrow$ $f(B)$ beschränkt.*

Beweis. Wir wissen schon, daß es für jede Umgebungsmenge immer eine kreisförmige Teilmenge gibt. Also können wir uns darauf beschränken, zu überprüfen, ob $\forall f\ \exists c : cf \in U(B,V)$. Das ist genau dann der Fall, wenn $f(B) \subseteq \frac{1}{c}V$ ist, also wenn $f(B)$ beschränkt ist. ■

Daß stetige Funktionen beschränkt sind, also daß $f(B)$ beschränkt ist, ist aber elementar: B beschränkt $\Rightarrow \exists \mu : B \subseteq \mu U$. Wir wenden f darauf an, dann gilt:

$$\forall V\ \exists U : f(B) \subseteq \mu f(U) \subseteq \mu V$$

Zurück zum Spezialfall der stetigen linearen Funktionale. Hier sieht man sofort, daß $U(B, \frac{1}{n}\mathbb{D}) = U(nB, \mathbb{D}) = \{f : f(nB) \in \mathbb{D}\} = (nB)^\circ$ gilt.

Jetzt wissen wir weshalb wir den Begriff des Polars einer Menge brauchen. $\mathcal{B}^\circ := \{B^\circ : B \in \mathcal{B}\}$ bildet eine Umgebungsbasis einer Topologie auf E'. Wir nennen den Dualraum von E, wenn er mit der von $\mathcal{B}$ induzierten Topologie versehen ist, $E'_{\mathcal{B}}$.

Einige Beispiele für $E'_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ Bornologie:

- Nehmen wir als $\mathcal{B}$ alle endlichen Mengen, $\mathcal{B} = Fin(E)$, dann erhalten wir die *schwache Topologie* = Topologie der punktweisen Konvergenz. Bezeichnung: E'_σ.
- Besteht $\mathcal{B}$ aus allen konvex-kompakten bzw. kompakten Mengen, dann erhalten wir E'_γ bzw. E'_c.
- E'_b schließlich ist die *starke Topologie* = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Mengen, also besteht $\mathcal{B}$ in dem Fall aus allen beschränkten Mengen.

Betrachten wir normierte Räume. Nicht alle dieser Topologien auf dem Dualraum sind wieder normierbar. Eine Norm auf $E'_{\mathcal{B}}$ müßte von der Form

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{x\in A \\ A\in\mathcal{B}}} \frac{|\langle \xi, x\rangle|}{\|x\|}$$

sein, das funktioniert bei der schwachen Topologie (im allgemeinen) nicht. Die übliche Operatornorm $\|\xi\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\xi(x)|$ liefert aber die starke duale Topologie E'_b.

2.2.2 Gleichgradige Stetigkeit

Definition 2.2.3 *Eine Menge von Funktionen* $\Lambda \subseteq LC(E,F)$ *heißt* gleichgradig stetig $\Longleftrightarrow$

$$\forall V \in \mathcal{V}\ \exists U \in \mathcal{U} : \forall f \in A : f(U) \subseteq V$$

Bei einer Menge von stetigen Funktionalen $\Lambda \subseteq E'$ vereinfacht sich der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit zu

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists U_0 \in \mathcal{U} : \forall \xi \in \Lambda : \xi(U_0) \subseteq \varepsilon \mathbb{D} \text{ oder} \\ &\forall \varepsilon > 0\ \exists U_0 \in \mathcal{U} : \Lambda \subseteq \left(\frac{1}{\varepsilon} U_0\right)^\circ . \end{aligned}$$

Wir setzen $U := \frac{1}{\varepsilon} U_0$, dann sehen wir wie einfach sich die gleichgradige Stetigkeit einer Menge von stetigen Funktionalen darstellen läßt:

Lemma 2.2.4 $\Lambda \subseteq E'$ *ist gleichgradig stetig* $\Longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{U} : \Lambda \subseteq U^\circ$

Es besteht eine Analogie zwischen gleichgradiger und gleichmäßiger Stetigkeit:

Eine Funktion ist gleichmäßig stetig auf einer Menge (von Punkten), wenn sie simultan für alle Elemente der Menge stetig ist.

Eine Menge von Funktionen ist gleichgradig stetig (in einem Punkt), wenn simultan alle Elemente der Funktionenmenge stetig sind.

2.2.3 Stetigkeitsbegriffe bilinearer Abbildungen

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit Mengen bilinearer Abbildungen, also Teilmengen von $B(E, F; G)$, die sich durch verschiedene Stetigkeitsbegriffe von einander unterscheiden.

Die schwächste und naheliegendste Stetigkeitsanforderung an bilineare Abbildungen ist die getrennte Stetigkeit, das heißt, daß die bilineare Abbildung getrennt in jedem Argument bei Festhalten des anderen Arguments stetig ist. Die Klasse dieser Abbildungen nennen wir $BSC(E, F; G)$. In normierten Räumen heißt getrennte Stetigkeit

$$\forall y\ \exists l(y)\ \forall x : \|b(x, y)\| \leq l(y)\,\|x\| \text{ und } \forall x\ \exists k(x)\ \forall y\ : \|b(x, y)\| \leq k(x)\,\|y\| \,.$$

Die Klasse $BC(E, F; G)$ besteht aus allen stetigen bilinearen Abbildungen im eigentlichen Sinne, das heißt stetig als Abbildung vom topologischen Produktraum $E \times F$ nach G.

In normierten Räumen E, F und G muß für $b \in BC(E, F; G)$ gelten:

$$\exists k : \|b(x, y)\| \leq k\,\|x\|\,\|y\|$$

Hier ist also, genauso wie bei linearen stetigen Funktionen, beschränkt und stetig dasselbe. Die beste Schranke k (hängt nur von b ab) liefert uns die *Operatornorm* auf BC.

$$\|b\| := \sup_{x,y \neq 0} \frac{\|b(x, y)\|}{\|x\|\,\|y\|} = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|b(x, y)\|$$

Es gibt, ähnlich wie bei den Topologien auf dem Dualraum, noch viele Abstufungen zwischen schwächster und stärkster Forderung.

Definition 2.2.5 $b \in B(E, F; G)$ *ist* hypostetig $\Longleftrightarrow$

$\forall\ W \in \mathcal{W}, B$ *beschränkt* $: \exists U \in \mathcal{U} : b(U, B) \subseteq W$ *und*

$\forall\ W \in \mathcal{W}, A$ *beschränkt* $: \exists V \in \mathcal{V} : b(A, V) \subseteq W$

Man kann die Hypostetigkeit auch umformulieren

Lemma 2.2.6 *$b \in B(E, F; G)$ ist hypostetig $\Longleftrightarrow \forall B$ beschränkt:*

$x \to 0$ während y in B bleibt $\Rightarrow b(x, y) \to 0$ und symmetrisch $\forall A$ beschränkt:

$y \to 0$ während x in A bleibt $\Rightarrow b(x, y) \to 0$.

Wir bezeichnen alle hypostetigen bilinearen Abbildungen mit BHC. Genauso wie bei den Topologien des Dualraums kann man statt der beschränkten Mengen auch für jedes Argument eine Bornologie verwenden, dadurch entsteht $BH_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}C$.

Definition 2.2.7 $b \in B(E, F; G)$ *ist* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-hypostetig $\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{ll} \forall W \in \mathcal{W}, B \in \mathfrak{B}: & \exists U \in \mathcal{U} : b(U, B) \subseteq W \text{ und} \\ \forall W \in \mathcal{W}, A \in \mathfrak{A}: & \exists V \in \mathcal{V} : b(A, V) \subseteq W \end{array}$$

Beispiel 2.2.8 *Die kanonische Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle : E'_b \times E \to \mathbb{C}$ ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-hypostetig, wobei*

$$\mathfrak{A} = \{A \subseteq U^\circ : U \in \mathcal{U}\}$$

die Menge aller gleichgradig stetigen Funktionalmengen und $\mathfrak{B} = b$ die Menge aller beschränkten Mengen ist.

Rechnen wir das nach: Sei $\varepsilon > 0$, B beschränkt. Wir nehmen $(\varepsilon B)^\circ = B_1^\circ \in \mathfrak{B}^\circ = \mathcal{U}$ dann gilt $|\langle B_1^\circ, B\rangle| \leq \varepsilon$.

Auch für die zweite Forderung sei $\varepsilon > 0$, jetzt aber A gleichgradig stetig, das heißt $A \subseteq U^\circ$, $U \in \mathcal{U}$. Wir finden schnell eine dazu passende Umgebung $U_1 \in \mathcal{U}$, nämlich $U_1 := \frac{1}{\varepsilon}U$. Dann ist $|\langle A, U_1\rangle| \leq \varepsilon$ erfüllt.

Wenn $\mathfrak{A} = Fin$ und $\mathfrak{B} = Fin$ beide die Menge aller endlichen Teilmengen sind, dann haben wir wieder den Begriff der getrennten Stetigkeit, also $BH_{Fin,Fin}C(E, F) = BSC(E, F)$.

In vielen bekannten Räumen fallen alle eben eingeführten Begriffe zusammen.

Lemma 2.2.9 *In normierten Räumen ist jede hypostetige bilineare Abbildung schon stetig.*

Beweis. In normierten Räumen E und F bedeutet hypostetig

$$\forall\, \varepsilon\mathbb{D}, sK_E\ \exists l(\varepsilon, s) \cdot K_F : b(sK_E, l(\varepsilon, s)K_F) \subseteq \varepsilon\mathbb{D}$$

($K_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ sei die Einheitskugel auf E). Wir setzen $k := \frac{\varepsilon}{l(\varepsilon,s)\cdot s}$, dann ist $b(K_E, K_F) \subseteq k\mathbb{D}$ oder anders ausgedrückt: $\exists k : \|b(x, y)\| \leq k\,\|x\|\,\|y\|$ ■

Lemma 2.2.10 *In vollständigen normierten Räumen (=Banachräumen) ist jede getrennt stetige Abbildung hypostetig, also insgesamt*

$$BSC(E, F; G) = BHC(E, F; G) = BC(E, F; G).$$

Beweis. Für den Beweis benötigen wir den Satz von Banach-Steinhaus.

Satz 2.2.11 (Banach-Steinhaus) *Sei E ein Banachraum, G ein normierter Raum, $A \subseteq LC(E, G)$. Dann gilt:*

$$\text{Für jedes } x \text{ ist } \{\|f(x)\| : f \in A\} \text{ beschränkt} \Rightarrow \{\|f\| : f \in A\} \text{ beschränkt}$$

Wenden wir den Satz von Banach-Steinhaus auf die Menge

$$A := \left\{ \frac{1}{\|y\|} b(\bullet, y) : y \in F \right\}$$

an, dann folgt aus getrennt stetig hypostetig. Denn $\frac{1}{\|y\|} b(x, y) \leq k(x)$ für jedes x einzeln ist nichts anderes als getrennt stetig im zweiten Argument, und aus

$$\left\| \frac{1}{\|y\|} b(\bullet, y) \right\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|\,\|y\|} \leq k \text{ für alle } x$$

folgt b ist stetig, also in normierten Räumen auch hypostetig. ■

Der Satz von Banach-Steinhaus lebt auf sogenannten tonnelierten[4] topologischen Vektorräumen, $BSC(E, F; G) = BHC(E, F, G)$ gilt auch auf diesen Räumen. Für den allgemeinen Fall muß man aber etwas vorsichtiger schließen, siehe [Tre70, Theorem 41.2]

Zum Schluß noch die Aufstellung der Inklusionen dieses Abschnitts:

$$BC \subseteq BHC \subseteq BH_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}C \subseteq BSC \subseteq B$$

[4] Eine Tonne (=barrel) ist eine absorbierende, kreisförmige, konvexe, abgeschlossene Menge. Ein topologischer Vektorraum E heißt tonneliert (=barreled) wenn jede Tonne in $\mathcal{U}$ liegt.

Kapitel 3

Das Tensorprodukt auf topologischen Vektorräumen

Ziel dieses Abschnitts soll es sein, auf verschiedenen Multikategorien - alle basierend auf der Kategorie der topologischen Vektorräume - ein Tensorprodukt zu konstruieren und dessen Eigenschaften zu behandeln. Dabei stoßen wir auf Verallgemeinerungen von Ergebnissen aus der Multilinearen Algebra vom Endlichdimensionalen ins Unendlichdimensionale.

3.1 Methoden der Topologisierung

Wir wollen folgendermaßen vorgehen: Auf dem algebraischen Tensorprodukt $E \otimes F$ führen wir eine Topologie $\mathcal{T}$ ein. $(E \otimes F, \mathcal{T})$ wird dann das Tensorprodukt in der Kategorie der topologischen Vektorräume zu gewissen Multimorphismen sein.

Wir beschäftigen uns zuerst mit Methoden, wie wir auf dem Vektorraum $E \otimes F$ mit Hilfe der universellen Eigenschaft eine Topologie definieren.

Am Anfang wollen wir eine notationell einfachere Situation betrachten, nämlich die Quotiententopologie.

Satz 3.1.1 *Sei $\kappa : E \to E/M$ die kanonische Abbildung. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *$\mathcal{T}_Q$ ist die Quotiententopologie*
2. *Eine Umgebungsbasis der Topologie $\mathcal{T}_Q$ ist durch*

$$\kappa(\mathcal{U}) := \{\kappa(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

gegeben.

3. *$\mathcal{T}_Q$ ist die feinste lineare Topologie, die κ stetig macht.*

4. *Für alle linearen Abbildungen $g : E/M \to F$ gilt:*

$g \circ \kappa$ stetig $\Rightarrow g$ stetig

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "g \circ \kappa"'] & E/M \arrow[dl, "g"] \\ F & \end{tikzcd}$$

Beweis.

$\boxed{2 \Rightarrow 4}$ $g \circ \kappa$ stetig $\Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}\ \exists U \in \mathcal{U} : g(\kappa(U)) \subseteq V \Longleftrightarrow g$ stetig.

$\boxed{4 \Rightarrow 3}$ Wir setzen $F := E/M$ mit einer anderen Topologie $\mathcal{T}'$, so daß $\kappa = id_{E/M} \circ \kappa$ stetig ist. Dann ist $id : (E/M, \mathcal{T}_Q) \to (E/M, \mathcal{T}')$ stetig, also $\mathcal{T}_Q$ ist feiner als $\mathcal{T}'$.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ Die Stetigkeit von κ, also $\forall V \in \mathcal{V}\ \exists U \in \mathcal{U} : \kappa(U) \subseteq V$, anders gesehen heißt: jede Menge aus $\mathcal{V}$ enthält eine Menge aus $\kappa(\mathcal{U})$. Weil $\mathcal{T}_Q$ die feinste Topologie ist muß $\mathcal{V}$ sogar alle Obermengen von $\kappa(\mathcal{U})$ enthalten, also ist $\kappa(\mathcal{U})$ eine Umgebungsbasis von $\mathcal{V}$.

■

Die letzte der drei äquivalenten Formulierungen läßt sich in der Kategorientheorie verallgemeinern, in sogenannten Kategorien mit Struktur. Diese bestehen aus einer Ausgangskategorie (bei uns Vektorräume) und einer „Struktur“ darauf (bei uns Topologie)

Definition 3.1.2 *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.*
$\mathcal{K}$ ist heißt Kategorie von $\mathcal{C}$-Objekten mit Struktur $\Longleftrightarrow$

- *Die Objekte bestehen aus Paaren $(A, \sigma), A \in Ob_{\mathcal{C}}$, σ nennt man eine Struktur auf A*
- *Die Morphismen sind gewisse $\mathcal{C}$-Morphismen, also:*
$$Mor_{\mathcal{K}}((A,\sigma),(B,\tau)) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$$
- *Die Verknüpfung $\circ$ ist die selbe.*
- *Isomorphien auf $\mathcal{C}$ erzeugen Isomorphien auf $\mathcal{K}$, das heißt für $(A,\sigma) \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{C}$ gilt:*
$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & B \quad \text{ist } \mathcal{C}\text{-Isomorphismus} \Rightarrow \\ \exists| \tau : f: & (A,\sigma) & \to & (B,\tau) \quad \text{ist } \mathcal{K}\text{-Isomorphismus} \end{array}$$

Man sieht schnell, daß topologische Vektorräume nach dieser Definition Vektorräume mit Struktur sind, genauso sind Topologien oder Vektorräume Mengen mit Struktur, usw. Die Eigenschaft 4 aus der Quotiententopologie schaut jetzt verallgemeinert folgendermaßen aus:

Definition 3.1.3 $t : (A, \sigma) \to (T, \tau)$ kooptimal[1] $\Longleftrightarrow$
Für alle $\mathcal{C}$-Morphismen $f : T \to B$ gilt:

$f \circ t$ *$\mathcal{K}$-Morphismus* $\Rightarrow f$ *$\mathcal{K}$-Morphismus*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f \circ t"'] & T \arrow[dl, "f"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Jetzt werden wir wieder zum Tensorprodukt zurückkommen. Wir suchen eine Topologie auf $T := E/M$ oder auf $T := E \otimes F$, also eine Struktur τ für T sodaß $t : (A, \sigma) \to (T, \tau)$ kooptimal wird. So eine Struktur wird *kooptimales Lifting* genannt.

Ähnlich wie der Begriff des Tensorprodukts ist der Begriff eines kooptimalen Liftings zunächst abstrakt gefaßt, wir wissen a-priori noch nicht, ob so etwas existiert.

Genug Allgemeinheit, jetzt wollen wir die Begriffe und Ergebnisse auf topologische Vektorräume anwenden. Die folgenden Sätze gelten, mit den gleichen Argumenten, sowohl in der Kategorie der topologischen Vektorräume, also auch in der Kategorie der lokalkonvexen Vektorräume.

Satz 3.1.4 *Wir betrachten (lokalkonvexe) topologischen Vektorräume mit Multimorphismen $Multimor$. Dann gilt:*

$(E \otimes F, \mathcal{T})$ *ist das Tensorprodukt* $\Longleftrightarrow \mathcal{T}$ *ist ein kooptimales Lifting zu* $\otimes$*, das heißt*

Für alle $g \in L(E \otimes F, G)$ gilt:

$g \circ \otimes$ *2Morphismus* $\Rightarrow g$ *stetig*

$$\begin{tikzcd} < E, F > \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "g \circ \otimes"'] & E \otimes F \arrow[dl, "g"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $f \in 2Mor(E, F; G)$. f ist insbesondere eine bilineare Abbildung, also

[1] Ein optimaler Morphismus ist durch die duale Eigenschaft beschrieben, also genauso, jedoch mit umgedrehten Pfeilrichtungen.

gibt es genau eine lineare Abbildung g, die

$$\begin{tikzcd} <E,F> \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f"] & E\otimes F \arrow[dl, "g"] \\ G & \end{tikzcd}$$

in der Kategorie der Vektorräume kommutativ macht.

Durch die Kooptimalität können wir jetzt zu topologischen Vektorräumen übergehen: $f = g \circ \otimes$ 2Morphismus $\Rightarrow g$ stetig, also mit $g \in LC(E \otimes F, G)$ ist die universelle Eigenschaft erfüllt, die Eindeutigkeit von g können wir direkt von der Kategorie der Vektorräume übernehmen. ■

Satz 3.1.5 *Wenn $\mathcal{T}$ ein kooptimales Lifting zu $\otimes$ ist, dann ist $\mathcal{T}$ die feinste (lokalkonvexe) Topologie, so daß $\otimes$ ein Multimorphismus ist.*

Mit anderen Worten: wenn es ein Tensorprodukt auf den (lokalkonvexen) topologischen Vektorräumen mit Multimorphismen $Multimor$ gibt, dann muß es das algebraische Tensorprodukt zusammen mit der feinsten (lokalkonvexen) Topologie, so daß $\otimes$ ein Multimorphismus ist, sein.

Beweis. Die Beweisidee haben wir bei der Quotiententopologie schon gesehen: Sei $\mathcal{T}$ ein kooptimales Lifting zu $\otimes$. Wir setzen $G := (E \otimes F, \mathcal{T}')$. mit einer anderen Topologie $\mathcal{T}'$, so daß $\otimes = id_{E\otimes F} \circ \otimes$ stetig ist. Dann ist $id : (E \otimes F, \mathcal{T}) \to (E \otimes F, \mathcal{T}')$ stetig, also $\mathcal{T}$ ist feiner als $\mathcal{T}'$. ■

Im Vergleich zu der Quotiententopologie 3.1.1 fehlt die Beschreibung durch eine Umgebungsbasis. In den konkreten Fällen ($BC, BHC, ..$) werden wir Umgebungsbasen finden. Begriffe wie „feinste Topologie“ oder „kooptimales Lifting“ sind nicht wirklich explizit. Wir werden auch andere Beschreibungen angeben. Dies werden Isomorphien oder Einbettungen in bereits bekannte andere Räume sein.

Zusammenfassend können wir Topologien auf dem Tensorprodukt auf folgende Weise einführen:

- Angabe einer Umgebungsbasis
- feinste (lokalkonvexe) Topologie $\mathcal{T}^*$, die $\otimes$ zu einem 2Morphismus macht:

  Wenn es ein Tensorprodukt gibt, dann muß es das algebraische Tensorprodukt gemeinsam mit der Topologie $\mathcal{T}^*$ sein - das ist aber nicht explizit.
- kooptimales Lifting von $\otimes$.

  Dazu müssen wir aber erst die Existenz des kooptimalen Liftings zeigen.

- Isomorphie oder Einbettung in einen bekannten topologischen Vektorraum.

  Wir können Eigenschaften dieser Einbettung verwenden, müssen jedoch erst zeigen, daß es sich dabei wirklich um ein Tensorprodukt zu gewissen Multimorphismen handelt (z.B. mittels der Kooptimalität).

3.2 Isomorphien zwischen Tensorprodukt und Räumen (bi-)linearer Abbildungen

3.2.1 LC und das Tensorprodukt

Satz 3.2.1 *Sei E ein lokalkonvexer, Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Dann sind*

$$\begin{array}{rrcl} \Psi: & E^* \otimes F & \to & L(E,F) \\ \Phi: & E' \otimes F & \to & LC(E,F) \\ & \xi \otimes y & \mapsto & \langle \xi, \bullet \rangle \cdot y \end{array}$$

Einbettungen, deren Bild jeweils genau die Funktionen mit endlichem Rang ($\dim imf < \infty$) *sind.*

Beweis. Sei $z = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes y_i$ mit $\{y_i : i = 1, ..., n\}$ linear unabhängig.

$$\Psi(z) = 0 \Longleftrightarrow \forall x : \sum_{i=1}^{n} \langle \xi_i, x \rangle \cdot y_i = 0$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit müssen alle ξ_i und damit auch z verschwinden. Also ist Ψ (und auch Φ) injektiv.

Als endliche Summe von Faktoren mit Rang 1 ist der Rang jedes Bildes endlich.

Die Surjektivität zeigen wir nur für $\Phi : E' \otimes F \to L(E,F)$, für Ψ funktioniert alles genauso, wir müssen uns nur nicht um die Stetigkeit kümmern.

Sei $f \in LC(E,F)$ beliebig mit endlichem Rang r und $b_1, \ldots, b_r$ eine Basis von imf. Um das Korollar 2.1.12 aus dem Satz von Hahn-Banach anzuwenden, setzen wir für fixes i : $M_i := [b_1, \ldots, \cancel{b_i}, \ldots b_r]$ und $x_i := b_i$. Dann existiert je ein $\zeta^i \in F'$ mit

$$\zeta^i(b_k) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases},$$

also $\zeta^i(b_k) = \delta^i_k$. Außerhalb von imf können wir natürlich nichts über die Werte von ζ^i aussagen, dort interessiert es uns aber auch nicht, denn wir verknüpfen f mit ζ^i. Das Bild von $z := \sum_{i=1}^{r} (\zeta^i \circ f) \otimes b_i$ unter Φ ist gleich f, denn sei $f(x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k b_k$, dann ist

$$\Phi(z)(x) = \sum_{i=1}^{r} \zeta^i \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k b_k \right) \cdot b_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \delta^i_k \cdot b_i = f(x).$$

■

Beispiel 3.2.2 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} tr : E' \otimes E &\to \mathbb{C} \\ \xi \otimes x &\mapsto \langle \xi, x \rangle \end{aligned}$$

heißt die Spur. *Aufgrund der Isomorphie aus dem letzten Satz können wir die Spur einer stetigen linearen Funktion mit endlichem Rang definieren. Im Endlichdimensionalen fällt dieser Begriff mit der Spur, die wir aus der linearen Algebra kennen, zusammen.*

3.2.2 BC und das Tensorprodukt

Jetzt kommen wir, ganz im Sinne des zweiten Teils der Motivation, zu einer weiteren Verallgemeinerung eines Resultats aus der multilinearen Algebra.

Zunächst die endlichdimensionale Fassung:

Lemma 3.2.3 *Seien E, F endlichdimensional. Dann ist $B(E^*, F^*)$ das Tensorprodukt von E und F, also $E \otimes F \cong B(E^*, F^*) = BC(E'_{\mathfrak{B}}, F'_{\mathfrak{B}})$. Die universelle Abbildung $t : E \times F \to B(E^*, F^*)$ ist durch $(x, y) \mapsto \varphi_{xy}$ mit $\varphi_{xy}(\xi, \eta) = \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y \rangle$ gegeben.*

Beweis. Eine „Fortsetzung“ einer beliebigen bilinearen Abbildung $f : E \times F \to G$ ist schnell gefunden:

$$\begin{aligned} g : B(E^*, F^*) &\to G \\ \varphi &\mapsto \sum_{i,j=1}^{m,n} f(e_i, \tilde{e}_j) \varphi(e^i, \tilde{e}^j) \end{aligned}$$

wobei $(e_i)_{i=1,..m}$ bzw. $(\tilde{e}_j)_{j=1,..,n}$ eine Basis von E bzw. F ist und $(e^i)_{i=1,..m}$ bzw. $(\tilde{e}^j)_{j=1,..,n}$ jeweils die duale Basis ist.

Also zur Eindeutigkeit, oder anders gesagt, wir müssen zeigen, daß das Bild $t(E, F)$ den gesamten Raum $B(E^*, F^*)$ aufspannt. Im Endlichdimensionalen können wir dies einfach mit einem Dimensionsvergleich lösen. Die Vektoren $(t(e^i, \tilde{e}^j)) = (\langle e^i, \bullet \rangle \langle \tilde{e}^j, \bullet \rangle)$ sind linear unabhängig $\Rightarrow \dim([t(E, F)]) = \dim B(E^*, F^*) = \dim E \cdot \dim F$ ■

Die unendlichdimensionale Fassung verwendet die schwache duale Topologie auf E':

Satz 3.2.4 *Es seien E und F lokalkonvexe Vektorräume mit T2. Dann ist $BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ das algebraische Tensorprodukt von E und F. Die Abbildung $t : E \times F \to BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ ist durch $(x, y) \mapsto \varphi_{xy}$ mit $\varphi_{xy}(\xi, \eta) = \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y \rangle$ gegeben. Oder anders gesehen: $E \otimes F \cong BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$, wobei die Isomorphie vorerst rein algebraisch ist.*

Beweis. Da wir beim unendlichdimensionalen Fall den Dimensionsvergleich nicht anwenden können, müssen wir uns etwas Neues überlegen. Zu zeigen ist zunächst

$$[t(E, F)] = BC(E'_\sigma, F'_\sigma).$$

Nehmen wir ein beliebiges $\varphi \in BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$. Aus der Stetigkeit erhalten wir, daß es zwei endliche Mengen A, B geben muß, mit

$$\begin{matrix} \xi \in A^\circ \\ \eta \in B^\circ \end{matrix} \Rightarrow \varphi(\xi, \eta) \in \mathbb{D}.$$

$Fin^\circ(E)$ ist nämlich die Umgebungsbasis von E'_σ (siehe 2.2.1).

Wir zerlegen $E' = M \oplus [A]^\circ$ (algebraisches Komplement). Leicht zu sehen ist, daß $[A]^\circ$ ein Unterraum von A° ist.

Nehmen wir jetzt $\xi = n\zeta \in [A]^\circ \leq A^\circ$, dann ist

$$|\varphi(n\zeta, \eta)| = n|\varphi(\zeta, \eta)| \leq 1.$$

Der Faktor n kommt auf die andere Seite der Ungleichung, dann lassen wir n gegen ∞ laufen.

$$|\varphi(\zeta, \eta)| \leq \frac{1}{n} \to 0 \text{ für } \zeta \in [A]^\circ \text{ und } \eta \in F' \text{ fix.}$$

Es gilt also $\varphi|_{[A]^\circ \times F'} = 0$. Genauso kann man symmetrisch mit $F' = N \oplus [B]^\circ$ verfahren. Es folgt, daß φ eindeutig durch die Angabe auf $M \times N$ bestimmt ist. Man beachte, daß A und B von φ abhängt. Jedes $\varphi \in BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ ist einzeln durch die Werte auf seiner eigenen Menge $M \times N$ eindeutig festgelegt.

Der wesentliche Punkt ist, daß M und N endlichdimensional sind. Denn es gilt $M \cong E'/[A]^\circ$ und

$$\zeta_1 + [A]^\circ = \zeta_2 + [A]^\circ \iff \zeta_1|_A = \zeta_2|_A \in A^*.$$

Wir wollen jetzt umgekehrt ein $\alpha \in A^*$ festhalten, und die Menge $K_\alpha := \{\zeta : \zeta|_A = \alpha\}$ studieren. K_α ist eine Nebenklasse $\zeta + [A]^\circ \in E'/[A]^\circ$.

Anders ausgedrückt: $M \cong E'/[A]^\circ \cong A^* \cong A$. Ebenso gilt $N \cong B$.

Aus der endlichdimensionalen Fassung des zu beweisenden Satzes können wir schließen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : M \otimes N &\to B(M, N) = BC(M, N) \\ (x \otimes y) &\mapsto \varphi_{x,y} = \langle \bullet, x \rangle \langle \bullet, y \rangle \end{aligned}$$

eine Isomorphie ist.

Es gibt also (endlich viele) Vektoren $(x_i)_{i \in I} \in A \cong M$ und $(y_j)_{j \in J} \in B \cong N$, so daß

$$\varphi = \sum_{i,j} \varphi_{x_i y_j} = \sum_{i,j} \langle \bullet, x_i \rangle \langle \bullet, y_j \rangle$$

auf $M \times N = A \times B$ gilt. Nach Konstruktion ($\langle \xi, x_i \rangle = 0$ für $\xi \in [A]^\circ$, $x_i \in A$) gilt diese Gleichung für alle $\xi \in E'_\sigma$, $\eta \in F'_\sigma$.

Wir wissen also, daß $t(E,F)$ den ganzen Raum $BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ aufspannt.

Sei nun $f \in B(E,F;G)$. Dann definieren wir die Abbildung g als

$$\begin{aligned} g : B(E'_\sigma, F'_\sigma) &\to G \\ \sum_{i,j}^{m,n} \langle \bullet, x_i \rangle \langle \bullet, y_j \rangle &\mapsto \sum_{i,j}^{m,n} f(x_i, y_j) \end{aligned}$$

Diese Definition ist eindeutig, da g auf einem Erzeugendensystem festgelegt ist. Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch zeigen, daß g wohldefiniert ist.

Dazu betrachten wir die Differenz zweier verschiedener Darstellungen von $\varphi \in B(E'_\sigma, F'_\sigma)$ und zeigen, daß die Differenz der Bilder gleich 0 ist.

Seien also $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_j)_{j\in J}$ endlich viele Vektoren mit

$$0 = \varphi - \varphi = \sum_{i,j}^{m,n} \langle \bullet, x_i \rangle \langle \bullet, y_j \rangle .$$

Wir können diese Vektoren ohne Beschränkung der Allgemeinheit linear unabhängig wählen. Nun braucht man nur die Vektoren ζ^i aus dem Korollar 2.1.12 einsetzen, und es folgt $x_i = 0$, $y_j = 0$ und $\sum_{i,j}^{m,n} f(x_i, y_j) = 0$. ∎

3.2.3 Topologien auf Räumen bilinearer Abbildungen

Ein Weg für die Definition einer Topologie auf $E \otimes F$ führt, wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, über BC. Wir wollen, ähnlich wie bei den Topologien auf $LC(E,F)$ in 2.2.1, eine Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf gewissen Mengen schaffen.

Die Umgebungsbasis von 0 soll also wieder von der Bauart

$$U(A,B;W) := \{f : f(A,B) \subseteq W\}$$

sein. Ob die erzeugte Topologie wirklich verträglich mit der linearen Struktur ist, hängt abermals von der Frage ab, ob $f(A,B)$ beschränkt ist. Und genau das ist sogar bei hypostetigen bilinearen Abbildungen der Fall. Wir können also eine Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Bornologien sind, nicht nur auf BC sondern auch auf BHC einführen. Und das werden wir jetzt tun.

Definition 3.2.5 *Die* ε-Topologie *auf* $BHC(E'_b, F'_b)$ *ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig stetigen Teilmengen von* E'_b *und* F'_b. *Wir bezeichnen mit* $BHC_\varepsilon(E'_b, F'_b)$ *die hypostetigen Bilinearformen mit der* ε*-Topologie. Eine Umgebungsbasis von* 0 *ist durch*

$$\begin{gathered} U(A,B) := \{\varphi : \varphi(A,B) \subseteq \mathbb{D}\}\,, \quad A \subseteq U^\circ, B \subseteq V^\circ \\ U, V \text{ jeweils Umgebungen von } 0 \text{ in } E, F \end{gathered}$$

gegeben. $BC(E'_b, F'_b) \leq BHC_\varepsilon(E'_b, F'_b)$ *wird durch die Unterraumtopologie zu* $BC_\varepsilon(E'_b, F'_b)$, *genauso wird* $BC(E'_\sigma, F'_\sigma) \leq BC_\varepsilon(E'_b, F'_b)$ *zu* $BC_\varepsilon(E'_\sigma, F'_\sigma)$.

Lemma 3.2.6 *$BHC_\varepsilon(E'_b, F'_b)$ ist Hausdorffsch.*

Beweis. Sei $\varphi \in BHC_\varepsilon(E'_b, F'_b)$. Wir müssen eine Umgebung finden, die φ nicht enthält - $U(\{a\}, \{b\})$ ist eine einfache Wahl, die ausreicht. Zu zeigen ist also, daß es ein $\lambda > 0$ gibt mit $\varphi(a, b) \notin \lambda\mathbb{D}$. Das ist aber genau die Hausdorffeigenschaft von $\mathbb{C}$. ■

3.3 $\otimes_\varepsilon, \otimes_\pi, \otimes_{in}, \otimes_{\mathfrak{AB}}$ - die verschiedenen Tensortopologien

3.3.1 Das injektive Tensorprodukt $\otimes_\varepsilon$

Wir wissen, daß $E \otimes F \cong BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ gilt und wir haben auf $BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ gerade eben eine Topologie definiert. Diese Topologie wird jetzt auf $E \otimes F$ übertragen.

Definition 3.3.1 *$E \otimes_\varepsilon F := (E \otimes F, \mathcal{T}_\varepsilon)$ heißt* injektives Tensorprodukt $\iff$ *$\mathcal{T}_\varepsilon$ ist die durch $E \otimes F \cong BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$, wobei $BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ die ε-Topologie trägt, induzierte Topologie. Eine Umgebungsbasis ist durch*

$$U(A, B) := \{\varphi : \varphi(A, B) \subseteq \mathbb{D}\}\,, \quad A \subseteq U^\circ, B \subseteq V^\circ$$

oder auch durch

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(U, V) &:= \{\varphi : \varphi(U^\circ, V^\circ) \subseteq \mathbb{D}\}\\ &= \left\{\sum x_i \otimes y_i : \xi(U) \subseteq \mathbb{D}, \eta(V) \subseteq \mathbb{D} \Rightarrow \left|\sum \langle \xi, x_i\rangle \langle \eta, y_i\rangle\right| \leq 1\right\}\end{aligned}$$

gegeben.

Das injektive Tensorprodukt haben wir, anders als im Abschnitt Methoden der Topologisierung 3.1 zuvor, nur mit einer Isomorphie zu einem bekannten Raum eingeführt. Wir wissen noch gar nicht, ob und welche Multimorphismen zu dem injektiven Tensorprodukt passen, mit welcher Definition von $2Mor$ wir die universelle Eigenschaft erreichen können. Wir kennen den Dualraum $(E \otimes_\varepsilon F)'$ noch nicht. Erst später, in 3.5.3, werden wir uns näher mit dem Dualraum des ε-Tensorprodukts auseinandersetzen.

Wie schaut die injektive Topologie auf normierten Räumen aus? Nun, wir können nicht E'_σ direkt betrachten, darauf haben wir keine Norm (siehe 2.2.1) Trotzdem ist $BC(E'_\sigma, F'_\sigma) \cong E \otimes_\varepsilon F$ normierbar, $BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ ist ja ein Teilraum von $BC(E'_b, F'_b)$.

Satz 3.3.2 *E, F normierte Räume. Dann ist auch $E \otimes_\varepsilon F$ ein normierter Raum mit der Norm $\| \; \|_\varepsilon$, die durch*

$$\|z\|_\varepsilon = \|\varphi\|_\varepsilon = \sup_{\|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1} |\varphi(\xi, \eta)|,$$

$$mit\ z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \Rightarrow \varphi = \left((\xi, \eta) \mapsto \sum_{i=1}^n \langle \xi, x_i\rangle \langle \eta, y_i\rangle\right),$$

gegeben ist.
Mit anderen Worten: $\| \, \|_\varepsilon$ *induziert die injektive Topologie auf* $E \otimes F$.

Beweis. $K_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ sei die Einheitskugel auf E. Mit der Identifikation $BC(E'_\sigma, F'_\sigma) = E \otimes F$, $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n \langle \bullet, x_i \rangle \langle \bullet, y_i \rangle$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} K_{E \otimes F, \| \, \|_\varepsilon} &= \left\{ \varphi : \sup_{\|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1} |\varphi(\xi, \eta)| \leq 1 \right\} \\ &= \{\varphi : \|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1 \Rightarrow |\varphi(\xi, \eta)| \leq 1\} = \\ &= \{\varphi : \xi \in K_E^\circ, \eta \in K_F^\circ \Rightarrow \varphi(\xi, \eta) \in \mathbb{D}\} = U(K_E^\circ, K_F^\circ). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\left\{ \lambda K_{E \otimes F, \| \, \|_\varepsilon} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$ auch eine Umgebungsbasis von $BC_\varepsilon(E'_\sigma, F'_\sigma) = E \otimes_\varepsilon F$, denn

$$U(\alpha K_E^\circ, \beta K_F^\circ) = \frac{1}{\alpha\beta} U(K_E^\circ, K_F^\circ) = \frac{1}{\alpha\beta} K_{E \otimes_\varepsilon F, \| \, \|_\varepsilon}.$$

■

3.3.2 Das induktive Tensorprodukt $\otimes_{in}$ und $\otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$

Die Topologie des ε-Tensorprodukt ist die gröbste Topologie auf $E \otimes F$, die wir untersuchen. Jetzt betrachten wir das andere Extrem, das induktive Tensorprodukt oder $\otimes_{in}$. Es handelt sich dabei um das Tensorprodukt bezüglich Multimorphismen BSC. Das induktive Tensorprodukt muß also nur die getrennt stetigen Funktionen mit der universellen Eigenschaft stetig machen, das ist eine schwache Forderung, also wird die Topologie fein sein.

Wir wollen in diesem Abschnitt das induktive Tensorprodukt gleich in einem mit dem Tensorprodukt zu $BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C$ betrachten, BSC ist ja nichts anderes als $BH_{Fin,Fin}C$ (siehe 2.2.3). Der erste Zugang ist wieder eine Einbettung in einen bekannten Raum, nämlich in $(BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F))^*$.

Dazu wollen wir zunächst E in E'^* einbetten. Wenn E Hausdorffsch und lokalkonvex ist, dann funktioniert dies genauso wie die allseits bekannte Einbettung von E in E^{**}:

$$\begin{array}{ccccccc} E & \to & E'^* & & & \\ x & \mapsto & \phi : & E' & \to & \mathbb{C} \\ & & & \xi & \mapsto & \xi(x) \end{array}$$

Die Abbildung ist injektiv wegen des Korollars 2.1.13 aus dem Satz von Hahn-Banach.

Diese Einbettung wenden wir jetzt bei der Suche nach einer geeigneten Topologie für das Tensorprodukt $E \otimes F$ zu $BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F)$ an. Aus dem Ansatz $(E \otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} F)' = BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F)$ bekommen wir

$$E \otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} F \subseteq (E \otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} F)'^* \subseteq (BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F))^*$$

Wir können also Tensoren als Elemente von $BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F)^*$ sehen, mittels

$$\begin{aligned}\sum x_i \otimes y_i : BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \sum \varphi(x_i, y_i)\end{aligned}$$

Was nehmen wir jetzt für eine Topologie auf $(BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F))^*$? Nun es wird die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-hypostetigen Mengen sein. Wir wollen aber, statt alle Begriffsbestandteile des Namens zu analysieren, gleich explizit eine Umgebungsbasis von $E \otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} F$ aufschreiben.

$$\begin{aligned}U(A,B,U,V) := &\left\{\sum x_i \otimes y_i : \varphi(A,V) \subseteq \mathbb{D}, \varphi(U,B) \subseteq \mathbb{D} \Rightarrow \left|\sum \varphi(x_i,y_i)\right| \leq 1\right\} \\ &A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}, U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\end{aligned}$$

Wir haben für die Injektivität der Einbettung $E \to E'^*$ verlangt, daß E lokalkonvex ist. Für $E \otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} F \subseteq (BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F))^*$ zeigen wir daher, daß die Mengen $U(A,B,U,V)$ konvex sind.

Es seien $s = \sum x_i \otimes y_i$ und $t = \sum x'_i \otimes y'_i \in U(A,B,U,V)$. Jede Konvexkombination $\alpha s + \beta t$ liegt dann wieder in $U(A,B,U,V)$, weil

$$\alpha \sum \varphi(x_i, y_i) + \beta \sum \varphi(x'_i, y'_i) \leq \alpha + \beta = 1$$

gilt.

Satz 3.3.3 *Die obenstehenden Umgebungsbasismengen*

$$\{U(A,B,U,V) : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}, U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$

liefern die lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ des Tensorprodukts $\otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ mit Multimorphismen $BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F)$.
Mit anderen Worten: die von $(BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F))^*$ induzierte Topologie ist ein kooptimales Lifting von $\otimes$.

Beweis. Da $\otimes(A,V)$ immer eine Teilmenge von $U(A,B,U,V)$ bildet, ist $\otimes$ $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-hypostetig.

Für $G := \mathbb{C}$ ist es nicht schwierig, die Kooptimalität zu zeigen.

$f \circ \otimes :< E, F >\to \mathbb{C}$ ist $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-hypostetig bedeutet

$$\forall A \in \mathfrak{A}\ \exists V \in \mathcal{V} : f \circ \otimes(A,V) \subseteq \mathbb{D}$$

(und analog mit $\mathcal{U}$ und $\mathfrak{B}$). Wir setzen $\varphi := f \circ \otimes$ in die Definition von $U(A,B,U,V)$ ein, dann folgt

$$\begin{aligned}\sum x_i \otimes y_i \in U(A,B,U,V) &\Rightarrow \left|\sum f \circ \otimes(x_i,y_i)\right| \leq 1 \\ &\Rightarrow f\left(\sum x_i \otimes y_i\right) \in \mathbb{D}, \text{ also } f \text{ ist stetig.}\end{aligned}$$

Für das allgemeine Resultat müssen wir eine Verbindung zwischen den hypostetigen bilinearen Abbildungen $f \circ \otimes \in BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F;G)$ und den hypostetigen Bilinearformen $\varphi \in BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F,\mathbb{C})$ aus der Definition von $U(A,B,U,V)$ finden. Diese Verbindung ist folgender Satz (Für die Notation $^\circ$ und $^\bullet$ siehe 2.2.1).

Satz 3.3.4 *Sei G ein lokalkonvexer Vektorraum mit Hausdorffeigenschaft, $D \subseteq G$. Dann gilt:*

$$D^{\circ\bullet} = \overline{\mathbb{D}\Gamma(D)}$$

Den Beweis dieses Resultats findet man in [Tre70, Prop. 35.3].

Aus diesem Satz folgt direkt, daß auch $\{W^{\circ\bullet} : W \in \mathfrak{W}\}$ eine Umgebungsbasis von G ist.

Sei nun $W \in \mathfrak{W}$ eine Umgebung in G. Für eine $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-hypostetige Abbildung $f \circ \otimes$ gilt

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathfrak{A}\ \exists V \in \mathcal{V} : f \circ \otimes(A,V) \subseteq W^{\circ\bullet} \quad \text{oder} \\ &\forall A \in \mathfrak{A}\ \exists V \in \mathcal{V} : (\zeta \circ f \circ \otimes(A,V) \subseteq \mathbb{D}\ \forall \zeta \in W^\circ) \end{aligned}$$

(und analog wieder mit $\mathcal{U}$ und $\mathfrak{B}$). Mit $\varphi := \zeta \circ f \circ \otimes$ in der Definition von $U(A,B,U,V)$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in U(A,B,U,V) \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} \zeta \circ f \circ \otimes(x_i,y_i)\right| \leq 1,$$
$$\text{das heißt, } z \in U(A,B,U,V) \Rightarrow \zeta \circ f(z) \in \mathbb{D}.$$

Wir wissen nun, daß $(\zeta \circ f)(U(A,B,U,V)) \subseteq \mathbb{D}\ \forall \zeta \in W^\circ$ erfüllt ist, das ist aber nichts anderes als $f(U(A,B,U,V) \subseteq W^{\circ\bullet}$, und damit ist f stetig. ∎

Beispiel 3.3.5 *Die Spur haben wir im Beispiel 3.2.2 eingeführt:*

$$\begin{aligned} tr : E' \otimes E &\to \mathbb{C} \\ \xi \otimes x &\mapsto \langle \xi, x \rangle \end{aligned}$$

Wir wissen, aus Beispiel 2.2.8, daß die kanonische Paarung $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-hypostetig ist, mit $\mathfrak{A}$ = gleichgradig stetige Mengen und $\mathfrak{B}$ = beschränkte Mengen. Daher ist die Spur ein stetiges lineares Funktional:

$$tr \in (E'_b \otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} E)' \cong BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E'_b, E).$$

3.3.3 Das projektive Tensorprodukt $\otimes_\pi$

Das projektive Tensorprodukt ist das Tensorprodukt zu den bilinearen stetigen Funktionen, also $2Mor(E,F;G) = BC(E,F;G)$. Wie bei den Methoden der Topologisierung vorgegeben, führen wir das π-Tensorprodukt am einfachsten über die feinste Topologie, mit der $\otimes$ stetig ist, ein.

Definition 3.3.6 *$E \otimes_\pi F := (E \otimes F, \mathcal{T}_\pi)$ heißt* projektives Tensorprodukt $\iff$ *$\mathcal{T}_\pi$ ist die* feinste *(lokalkonvexe) Topologie, welche die Abbildung $\otimes : E \times F \to E \otimes F$ stetig macht.*

Wir können hier aber auch eine Umgebungsbasis angeben. In die Analogie zu der Quotiententopologie, wäre man versucht, einfach die Bilder der Umgebungsbasis $\otimes(U,V)$ als Umgebungsbasis für die Topologie auf dem π-Tensorprodukt zu nehmen. Doch die Menge

$$\otimes(\mathcal{U},\mathcal{V}) := \{\otimes(U,V) : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$

ist im allgemeinen keine Umgebungsbasis. Nicht jedes $\otimes(U,V)$ wird absorbierend sein. Ein beliebiges Element $\sum x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ wird sich nicht mit einem $c > 0$ so weit komprimieren lassen, daß $c\left(\sum x_i \otimes y_i\right)$ ein Element von $\otimes(U,V)$ wird. Ab der Dimension 4 gibt es schon nicht zerlegbare Elemente in $E \otimes F$, also solche, die sich nicht als Bild von $\otimes$ schreiben lassen.

Im Falle lokalkonvexer Vektorräume lösen wir das Problem, in dem wir einfach die konvexe Hülle von $\otimes(U,V)$ als Umgebungsbasismenge nehmen:

$$\mathfrak{W} = \{\Gamma(\otimes(U,V)) : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$

Dann sind die Umgebungsmengen absorbierend. Seien x_i und y_i absorbierend mit dem Faktor $c = \lambda_i$ bzw $c = \mu_i$, also $x_i \in \lambda_i U$ und $y_i \in \mu_i V$. Dann gilt mit

$$c^* := \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \text{ und } \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \mu_i}{c^*} = 1$$
$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = c^* \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \mu_i}{c^*} \left(\frac{x_i}{\lambda_i} \otimes \frac{y_i}{\mu_i} \right) \in c^* \cdot \Gamma(U \otimes V).$$

Eine andere Methode, um auf das π-Tensorprodukt zu kommen, folgt der Vorgangsweise beim induktiven Tensorprodukt (3.3.2). Wir betten $E \otimes_\pi F$ in $(BH_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}C(E,F))^*$ ein und erhalten eine Umgebungsbasis

$$U(U,V) = \left\{ \sum x_i \otimes y_i : \varphi(U,V) \subseteq \mathbb{D} \Rightarrow \left| \sum \varphi(x_i,y_i) \right| \leq 1 \right\},\ U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}.$$

Satz 3.3.7 *Die Umgebungsbasis $\{U(U,V) : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ liefert die die π-Topologie, genauso wie $\{\Gamma(\otimes(U,V)) : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.*

Beweis.

- $\Gamma(\otimes(U,V)) \subseteq U(U,V)$: Sei $\sum \alpha_i(x_i \otimes y_i) \in \Gamma(\otimes(U,V))$ eine Konvexkombination, dann gilt für jedes φ, sodaß $\varphi(U,V) \subseteq \mathbb{D}$:

$$\left|\sum \alpha_i \varphi(x_i, y_i)\right| \leq \sum \alpha_i \left|\varphi(x_i, y_i)\right| \leq \sum \alpha_i = 1.$$

- $\Gamma(\otimes(U,V))$ bildet die feinste lokalkonvexe Topologie, so daß $\otimes$ stetig wird. Also müssen wir nur noch zeigen, daß $\otimes$ bezüglich der Umgebungsbasis $U(U,V)$ stetig ist. Das ist aber leicht: Für zwei Umgebungen U und V liegt $\otimes(U,V)$ immer in $U(U,V)$. Dies ist aus der Definition gleich ersichtlich, interessant ist aber auch, daß es direkt aus der anderen Beweisrichtung folgt.

■

Wegen Lemma 2.2.9 fällt in normierten Räumen das Tensorprodukt $\otimes_\pi$ mit $\otimes_b$, dem Tensorprodukt zu BHC zusammen, in Banachräumen gilt sogar $\otimes_\pi = \otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} = \otimes_{in}$(Lemma 2.2.10).

Wir werden zwei Darstellungen für die π-Norm angeben. Die erste kommt direkt von $\otimes_\pi$, von der Umgebungsbasis $\Gamma(\otimes(U,V))$, die zweite von $\otimes_b$ und der Einbettung in $(BHC(E,F))^* = (BC(E,F))^*$.

Satz 3.3.8 *Es seien E und F normierte Räume. Dann ist auch $E \otimes_\pi F$ ein normierter Raum mit der Norm $\| \; \|_\pi$, die durch folgende zwei Darstellungen gegeben ist:*

1.

$$\|z\|_\pi := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \, \|y_i\| : \quad z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}$$

2.

$$\|z\|_{\pi b} := \left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\|_{\pi b} = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i) \right|$$

Außerdem gilt $\|x \otimes y\|_\pi = \|x\| \, \|y\|$.

Die zweite Definition ist von der Darstellung von z unabhängig, weil $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i)$ ist nichts anders, als die Anwendung der zu $\varphi \in BC(E,F) = (E \otimes_\pi F)'$ gehörigen Linearform auf z ist. Dagegen ist $\|x_i\| \, \|y_i\|$ natürlich keine bilineare Abbildung.

Beweis.

- Wieder sei $K_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel auf E. Dann gilt

$$\begin{aligned}
K_{E\otimes F, \| \|_{\pi b}} &= \left\{ z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i : \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i) \right| \leq 1 \right\} = \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i : \|\varphi\| \leq 1 \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i) \right| \leq 1 \right\} = \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i : \varphi(K_E, K_F) \subseteq \mathbb{D} \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i) \right| \leq 1 \right\} = \\
&= U(K_E, K_F).
\end{aligned}$$

  Also induziert $\| \|_{\pi b}$ genau die π-Topologie auf $E \otimes F$. Genauso kann man für $\| \|_\pi$ leicht zeigen, daß $K_{E\otimes F, \| \|_\pi} = \Gamma(\otimes(K_E, K_F))$ gilt, und damit auch $\| \|_\pi$ die π-Topologie induziert.

- Um die Gleichung $\|x \otimes y\|_\pi = \|x\| \|y\|$ zu zeigen braucht man eine Folgerung des Satzes von Hahn-Banach (Korollar 2.1.14). Seien x_0, y_0 fix, ξ (bzw. η) ist durch die Norm beschränkt und bei x_0 (bzw. y_0) gleich der Norm. Ferner sei $z = x_0 \otimes y_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Dann gilt:

$$\|x_0\| \|y_0\| = \xi(x_0)\eta(y_0) = |(\xi \otimes \eta)(z)| \leq \sum \xi(x_i) \otimes \eta(y_i) \leq \sum \|x_i\| \|y_i\|$$

  Mit genau der selben Methode kann man schnell zeigen, daß auch $\|x \otimes y\|_{\pi b}$ gleich $\|x\| \|y\|$ ist.

- Jetzt ist es klar, daß die beiden Darstellungen der π-Norm übereinstimmen. Denn die beiden Normen sind äquivalent, da sie die selbe Topologie induzieren, das heißt $\|z\|_\pi \leq C \|z\|_{\pi b}$ und $\|z\|_{\pi b} \leq D \|z\|_\pi$ mit zwei fixen Konstanten C und D. Diese Konstanten müssen aber gleich eins sein, da $\|x \otimes y\|_\pi = \|x\| \|y\| = \|x \otimes y\|_{\pi b}$ gilt.

■

Satz 3.3.9 *Es seien E, F und G normierte Räume. Dann ist der Isomorphismus zwischen $BC(E, F; G)$ und $LC(E \otimes_\pi F, G)$ eine Isometrie.*

Beweis. Für jedes $z \in E \otimes F$ und jede Darstellung $z = \sum x_i \otimes y_i$ gilt:

$$\|f(z)\| = \left\| \sum b(x_i, y_i) \right\| \leq \sum \|b\| \|x_i\| \|y_i\| = \|b\| \sum \|x_i\| \|y_i\| .$$

Nach Bildung des Infimums folgt $\|f\| \leq \|b\|$. Auch für die umgekehrte Richtung brauchen wir nur ein Bildelement abschätzen:

$$\|b(x, y)\| = \|f(x \otimes y)\| \leq \|f\| \|x \otimes y\|_\pi = \|f\| \|x\| \|y\|$$

■

Zum Schluß dieses Abschnitts möchten wir noch die Assoziativität des projektiven Tensorprodukts gemäß 1.4.3 zeigen. Die Assoziativität von $\otimes_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ wird in Lemma 3.6.1 behandelt.

Lemma 3.3.10 *Für drei lokalkonvexe topologische Vektorräume gilt:*

$$(E \otimes F \otimes G, \mathcal{T}_\pi) \cong E \otimes_\pi (F \otimes_\pi G) \cong (E \otimes_\pi F) \otimes_\pi G.$$

Beweis. Es seien U, V, W und X immer jeweils Umgebungen in lokalkonvexen Räumen E, F, G und H. Wir gehen von einer stetigen multilinearen Funktion $\varphi :< E, F, G >\to H$ aus, also $\forall X \ \exists U, V, W : \varphi(U, V, W) \subseteq X$. Die Abbildung $\varphi_z = \varphi(\bullet, \bullet, z)$ (siehe 1.4.3) ist trivialerweise stetig. f sei die universelle „Fortsetzung" von f_w wie in 1.4.3.

$$f\left(\sum \alpha_i(u_i \otimes v_i), w\right) = \sum \alpha_i f_w(u_i, v_i) = \sum \alpha_i \varphi(u_i, v_i, w) \in \sum \alpha_i X \subseteq \Gamma X$$

zeigt, daß für konvexes $X \quad f(\Gamma(\otimes(U, V)), W) \subseteq X$ gilt und damit f stetig ist.

Der Grundkörper $\mathbb{C}$ bildet ein neutrales Element, insgesamt ist daher $(\mathfrak{lcVect}, \otimes, \mathbb{C})$ ist eine symmetrische monoidale Kategorie (siehe 1.4.3) ■

3.3.4 Lineare stetige Abbildungen zwischen Tensorräumen

Satz 3.3.11 *Es seien* $E_1 \xrightarrow{f} E_2, F_1 \xrightarrow{g} F_2$ *lineare stetige Abbildungen. Dann ist*

$$\begin{aligned} f \otimes g : E_1 \otimes F_1 &\to E_2 \otimes F_2 \\ x \otimes y &\mapsto f(x) \otimes g(x) \end{aligned}$$

stetig, sowohl wenn beide Tensorräume die projektive, als auch wenn beide die injektive Topologie tragen.

Die Abbildung

$$f \otimes g : E_1 \otimes_{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1} F_1 \to E_2 \otimes_{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2} F_2$$

ist stetig wenn wir $f(\mathfrak{A}_1) \subseteq \mathfrak{A}_2$ *und* $g(\mathfrak{B}_1) \subseteq \mathfrak{B}_2$ *fordern. Insbesondere ist daher die Abbildung* $f \otimes g$ *beim induktiven Tensorprodukt stetig.*

Beweis.

- Für die π-Topologie müssen wir nichts zeigen, $f \otimes g$ ist ja genau die lineare stetige universelle „Fortsetzung" von $(x, y) \mapsto f(x) \otimes g(x)$ (siehe 1.3.2). Genauso ist $f \otimes g : E_1 \otimes_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} F_1 \to E_2 \otimes_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} F_2$ stetig. Das allgemeine Resultat für $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1) \neq (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2)$ findet sich in [Fis63, Satz 7].

- Beim injektiven Tensorprodukt ε ist die Situation anders. Hier sind wir nicht von der universellen Eigenschaft ausgegangen.

  Wie wirkt die Abbildung $f \otimes g$ auf $BC(E'_{1,\sigma}, F'_{1,\sigma}) \cong E_1 \otimes_\varepsilon F_1$? Schauen wir uns dies zunächst am Bild von $\otimes(E_1, F_1)$ an.

$$((f \otimes g)\,(x \otimes y))\,(\xi, \eta) = \langle \xi, f(x) \rangle \, \langle \eta, g(y) \rangle = \left\langle f^T(\xi), x \right\rangle \left\langle g^T(\eta), y \right\rangle$$

  f^Tist dabei die transponierte Abbildung.

  $BC(E'_{2,\sigma}, F'_{2,\sigma})$ wird vom Bild von $E_1 \times F_1$ erzeugt, also gilt

$$\begin{aligned} f \otimes g : BC(E'_{1,\sigma}, F'_{1,\sigma}) &\to BC(E'_{2,\sigma}, F'_{2,\sigma}) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ (f^T, g^T) \end{aligned} \tag{3.1}$$

  Sei $U(A, B)$ eine Umgebung von $BC(E'_{2,\sigma}, F'_{2,\sigma})$, A, B gleichgradig stetig. Wir nehmen $U(f^T(A), g^T(B))$ als dazugehörige Umgebung auf $BC(E'_{1,\sigma}, F'_{1,\sigma})$. Damit gilt:

$$\begin{gathered} \varphi \in U(f^T(A), g^T(B)) \Leftrightarrow \varphi(f^T(A), g^T(B)) \subseteq \mathbb{D} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varphi \circ (f^T, g^T)(A, B) \subseteq \mathbb{D} \Leftrightarrow \varphi \circ (f^T, g^T) \in U(A, B) \end{gathered}$$

■

Korollar 3.3.12 *$E' \otimes F' \leq (E \otimes_x F)'$ für $x = \varepsilon, in, \mathfrak{AB}$ oder π*

Beweis. Wir nehmen $E_2 = F_2 = \mathbb{C}$. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} E' \otimes F' &\to (E \otimes_x F)' \\ \xi \otimes \eta &\mapsto \xi \otimes \eta \end{aligned}$$

wobei $\xi \otimes \eta$, wie in 1.3 auf Seite 15 erklärt, einmal ein Element $\otimes(\xi, \eta) \in E' \otimes F'$ und einmal ein Element von $(E \otimes_x F)'$ ist.

Diese Abbildung ist injektiv, denn beginnend mit $\xi \otimes \eta \in (E \otimes_x F)'$ gilt:

$$\xi \otimes \eta = 0 \Rightarrow (\xi \otimes \eta)(x \otimes y) = \xi(x) \cdot \eta(y) = 0 \; \forall x, y \Rightarrow \xi = 0 \vee \eta = 0 \Rightarrow \xi \otimes \eta = 0$$

■

Lemma 3.3.13 *$\|f \otimes g\|_\varepsilon = \|f \otimes g\|_\pi = \|f\| \, \|g\|$, wobei die Normen natürlich Operatornormen (siehe 2.2.1) sind.*

Beweis. Wie nicht anders zu erwarten, eine Abschätzung in zwei Richtungen. Die erste Richtung gilt für alle Normen mit $\|x\| \, \|y\| = \|x \otimes y\|_x$:

$$\|(f \otimes g)(x \otimes y)\|_x = \|f(x) \otimes g(y)\|_x = \|f(x)\| \, \|g(y)\|$$

Sei nun $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$, dann ist auch $\|x \otimes y\|_x \leq 1$ und daher

$$\|f(x)\| \, \|g(y)\| = \|(f \otimes g)(x \otimes y)\|_x \leq \|f\| \, \|g\|$$

Nehmen wir das Supremum über $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$, so erhalten wir $\|f\| \, \|g\| \leq \|f \otimes g\|_x$.

Wir beginnen mit der ε-Topologie: Aus dem Beweis von Satz 3.3.11 (3.1) wissen wir schon

$$(f \otimes g)(\varphi) = \varphi \circ (f^T, g^T), \ \varphi \in BC(E'_{1,\sigma}, F'_{1,\sigma}) = E_1 \otimes_\varepsilon F_1. \text{ Mit}$$

$$\left\|\varphi(f^T(\xi), g^T(\eta)\right\| \leq \|\varphi\|_\varepsilon \left\|f^T\right\| \|\xi\| \left\|g^T\right\| \|\eta\|$$

folgt daraus $\|f \otimes g\|_\varepsilon \leq \left\|f^T\right\| \left\|g^T\right\| = \|f\| \, \|g\|$.

Für die π-Topologie sieht man direkt: Die bilineare stetige Abbildung $(x, y) \to f(x) \otimes g(y)$ hat Norm $\|f\| \, \|g\|$. Aufgrund von Lemma 3.3.9 gilt dies auch für $f \otimes g$. ■

3.3.5 Tensornormen

Nun wollen wir normierbare Topologien zwischen ε und π untersuchen. Es sei $\| \, \|_\alpha$ eine Norm auf $E \otimes F$, wobei E, F normierte Räume sind. Weil später mehrere Räume vorkommen werden, schreiben wir auch $\alpha(\bullet, E, F) = \| \, \|_\alpha$

Definition 3.3.14 *Eine Norm* $\| \, \|_\alpha = \alpha(\bullet, E, F)$ *heißt* vernünftig $\Longleftrightarrow$

1. $\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \, \|y\|$
2. $E' \otimes F' \leq (E \otimes_\alpha F)'$
3. *die durch 2 auf* $E' \otimes F'$ *induzierte Norm* $\overline{\alpha}$ *erfüllt*
   $\|\xi \otimes \eta\|_{\overline{\alpha}} = \|\xi\| \, \|\eta\|$

Als nächstes betrachten wir für je zwei endlichdimensionale normierte Räume eine Norm $\alpha(\bullet, E, F)$ auf $E \otimes F$. Genauer gesagt, wir nehmen aus jeder Klasse isometrischer endlichdimensionaler normierter Räume Repräsentanten (sonst bekämen wir Probleme mit der Fundierung).

Definition 3.3.15 *Eine* Tensornorm *ist eine Familie von Normen*

$$\underline{\alpha} := \{\alpha(\bullet, E, F) : E, F \textit{ Repräsentanten endlichdim. normierter Räume}\}$$

mit

1. $\alpha(\bullet, E, F)$ *vernünftig*

2. *$\underline{\alpha}$ erfüllt die metrische Abbildungseigenschaft, das heißt*

   Für $E_1 \xrightarrow{f} E_2, F_1 \xrightarrow{g} F_2$ und $f \otimes g : E_1 \otimes F_1 \to E_2 \otimes F_2$ gilt (mit der Operatornorm)

   $\|f \otimes g\|_\alpha = \|f\| \, \|g\|$

Einfache Beispiele für Tensornormen sind unsere wohlbekannten Normen $\| \, \|_\pi$ und $\| \, \|_\varepsilon$

Bis jetzt haben wir nur auf endlichdimensionalen Räumen Normen. Aus jeder Tensornorm bekommt man leicht eine vernünftige Norm auf dem Tensorprodukt $E \otimes F$ beliebiger normierter Räume:

$$\alpha(z, E, F) := \inf \{\alpha(z, M, N) : M, N \text{ endlichdim. Teilräume von } E \text{ bzw. } F\}$$

Wir können die Menge der Tensornormen ordnen durch

$$\underline{\alpha} \leq \underline{\beta} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : \alpha(\bullet, E, F) \leq \beta(\bullet, E, F) \; \forall E, F.$$

Die ε-Norm ist die kleinste, die π-Norm die größte Tensornorm in dieser Ordnung.

Der nächste Schritt ist eine Definition einer Topologie auf $E \otimes F$ für zwei lokalkonvexe Räume E und F mittels einer Tensornorm $\underline{\alpha}$. Wir bilden für zwei Halbnormen (siehe Definition 2.1.10) p und q die Faktorräume mit kanonischen Abbildungen $E \xrightarrow{\kappa_E} E/\ker p$ und $F \xrightarrow{\kappa_F} F/\ker q$. Diese sind normierte Räume.

Jetzt können wir $p \otimes_\alpha q$ definieren:

$$(p \otimes_\alpha q)(z) := \alpha((\kappa_E \otimes \kappa_F)(z), E/\ker p, F/\ker q)$$

Die Menge $\{p \otimes_\alpha q : p, q \text{ stetige Halbnormen}\}$ liefert ein System von stetigen Halbnormen, also auch eine lokalkonvexe Topologie auf $E \otimes F$. Wir bezeichnen diesen lokalkonvexen Raum mit $E \otimes_\alpha F$.

Wir haben also durch Angabe einer Norm auf allen Tensorprodukten endlichdimensionaler normierter Räume eine Topologie auf dem Tensorprodukt lokalkonvexer Vektorräume konstruiert. Einige Eigenschaften von Tensornormen lassen sich genauso auf lokalkonvexe Vektorräume ausdehnen. So folgt zum Beispiel aus der metrischen Abbildungseigenschaft von α (2 von Definition 3.3.15) die Stetigkeit von $f \otimes g$ bezüglich der α-Topologie.

Mehr über Tensornormen findet sich zum Beispiel in [Har82].

3.3.6 Zusammenfassung: kompatible Topologien

Wir haben folgende Topologien für $E \otimes F$ beschrieben:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
J & \subseteq & & \subseteq & BC & \subseteq & BHC & \subseteq & BH_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}C & \subseteq & BSC & \subseteq & B \\
\otimes_\varepsilon & & \otimes_\alpha & & \otimes_\pi & & \otimes_b & & \otimes_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} & & \otimes_{in} & & \otimes \\
\mathcal{T}_\varepsilon & \leq & \mathcal{T}_\alpha & \leq & \mathcal{T}_\pi & \leq & \mathcal{T}_b & \leq & \mathcal{T}_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} & \leq & \mathcal{T}_{in} & &
\end{array}$$

Die Topologien von $\mathcal{T}_\pi$ bis $\mathcal{T}_{in}$ sind die feinsten lokalkonvexen Topologien, so daß $\otimes :< E, F >\to E \otimes F$ in BC bis BSC liegt. Auf die ε-Topologie sind wir über die Isomorphie $E \otimes F \cong BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ gekommen. Es gibt aber auch noch Topologien zwischen π und ε, jede Tensornorm α induziert so eine Topologie. J, die sogenannten integralen Bilinearformen, sind die 2Morphismen, die zum ε-Tensorprodukt passen. Wir werden sie in 3.5.3 kennenlernen.

In unterschiedlichen Stellen ist die Eigenschaft der Lokalkonvexität vorgekommen. Bei topologischen Vektorräumen ohne dieser Eigenschaft hängt es vom konkreten Fall ab, ob man die Konstruktionen weiterhin durchführen kann, insbesondere ob die einzelnen Definitionen von $\mathcal{U}_{E\otimes F}$ wirklich eine Umgebungsbasis darstellen. Die Hausdorffeigenschaft haben wir nur bei der projektiven Topologie vermeiden können.

Die Topologien $\mathcal{T}_\varepsilon$ bis $\mathcal{T}_{in}$ haben eine gemeinsam Eigenschaft - die Kompatibilität.

Definition 3.3.16 *Eine Topologie $\mathcal{T}_c$ auf $E \otimes F$ ist* kompatibel *zum algebraischen Tensorprodukt*$\Longleftrightarrow$

1. $\otimes \in BSC(E, F; E \otimes_c F)$
2. $E' \otimes F' \subseteq (E \otimes_c F)'$
3. $\forall U, V \ \exists W$ Umgebung in $\mathcal{T}_c : \otimes(U^\circ, V^\circ) \subseteq W^\circ$. Das heißt: $\xi(U) \subseteq \mathbb{D}$ und $\eta(U) \subseteq \mathbb{D} \Rightarrow (\xi \otimes \eta)(W) \subseteq \mathbb{D}$

Anders ausgedrückt: Eine Topologie ist kompatibel, wenn sie zwischen $\mathcal{T}_\varepsilon$ und $\mathcal{T}_{in}$ liegt und für $\xi \in E'$, $\eta \in F'$ $\xi \otimes \eta$ ein Element des Dualraums ist.

In normierten Räumen ($\otimes_\pi = \otimes_{in}$!) kam die Kompatibilität schon unter einem anderen Namen vor. Die induzierte Topologie ist kompatibel mit dem algebraischen Tensorprodukt $\Longleftrightarrow \exists\, c > 0$, sodaß $c \| \ \|_\alpha$ vernünftig ist (siehe 3.3.14).

3.4 Quotienten- und Unterraumeigenschaften

Wir bezeichnen mit $E \otimes_x F$ das algebraische Tensorprodukt mit irgendeiner „verträglichen“ Topologie $\mathcal{T}$.

$\otimes_x$ ist ein Bifunktor, wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, was dieser mit Quotienten (=Coequalisatoren) und Unterräumen (=Equalisatoren) macht. Zuerst untersuchen wir den Kern von $f \otimes g$.

Lemma 3.4.1 *Es seien* $E_1 \xrightarrow{f} E_2, F_1 \xrightarrow{g} F_2$ *lineare stetige Abbildungen. Dann gilt*

$$\ker f \otimes g = \ker f \otimes F_1 + E_1 \otimes \ker g.$$

Beweis. Zunächst setzen wir Tensoren der Form

$$n \otimes y + x \otimes m,\ n \in \ker f,\ m \in \ker g$$

in $f \otimes g$ ein. Wie erwartet, kommt 0 dabei heraus. Wir zerlegen E (bzw. F) in direkte Summanden $C \oplus \ker f$ (bzw. $D \oplus \ker g$). Dann folgt

$$E \otimes F = C \otimes D + \ker f \otimes F + E \otimes \ker g$$

Zu zeigen ist jetzt nur noch, daß der Kern nicht größer als erwartet ist, also aus $z \in C \otimes D, z \neq 0$ muß $(f \otimes g)\,(z) \neq 0$ folgen. Oder mit $f_1 := f|_C$ und $g_1 := g|_D$ ausgedrückt: f_1 und g_1 injektiv $\Rightarrow f_1 \otimes g_1$ injektiv.

Und genau das war die Aussage des Lemmas 1.6.3. ■

Definition 3.4.2 $\otimes_x$ *hat die* Quotientenraumeigenschaft, *wenn die Quotientenbildung respektiert wird, das heißt*

$$E/M \otimes_x F/N = E \otimes_x F/((E \otimes N) + M \otimes F))$$

Definition 3.4.3 $\otimes_x$ *hat die* Unterraumeigenschaft, *wenn die Unterraumbildung respektiert wird, das heißt*

$$\begin{matrix} G \leq E \\ H \leq F \end{matrix} \Rightarrow G \otimes_x H \leq E \otimes_x F$$

Das algebraische Tensorprodukt hat diese Eigenschaften in trivialer Weise. Aber es muß nicht sein, daß sich das auch auf die Topologien überträgt:

Satz 3.4.4 .

$\otimes_\pi$ *hat die Quotienten-, aber nicht die Unterraumeigenschaft,*
$\otimes_\varepsilon$ *hat die Unterraum-, aber nicht die Quotientenraumeigenschaft.*

Beweis. Wir wissen schon aus Lemma 3.4.1: Wenn $\kappa_E : E \to E/M$ und $\kappa_F : F \to F/N$ die Quotientenabbildungen sind, so ist auch $\kappa_E \otimes \kappa_F : E \otimes F \to E/M \otimes F/N$ die (algebraische) Quotientenabbildung. Zu zeigen ist, daß die Quotiententopologie $\mathcal{T}_Q$ mit der $\pi-$Topologie $\mathcal{T}_\pi$ von $E/M \otimes F/N$ übereinstimmt. Es gilt sogar mehr:

$$\kappa_E \otimes \kappa_F(\Gamma(\otimes(U, V)) = \Gamma(\otimes(\kappa_E(U), \kappa_F(V)), \text{ mit } U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}$$

Denn die lineare Abbildung $\kappa_E \otimes \kappa_F$ vertauscht mit der Konvexkombinationsbildung Γ, und $\kappa_E(U)$ bzw $\kappa_F(V)$ sind Umgebungen von E/M bzw. F/N.

Anders ist die Situation bei Unterräumen. Die Topologie $\mathcal{T}_\pi$ von $G \otimes_\pi H$ kann echt feiner sein als $\mathcal{T}_U$, die von $E \otimes_\pi F$ induzierte Topologie. Zwar muß jede Umgebung in $E \otimes_\pi F$ Umgebung in $G \otimes_\pi H$ sein, da die Inklusion $i \otimes j$ stetig ist. Aber es könnte in $G \otimes_\pi H$ durchaus mehr Umgebungen geben. So einfach wie vorher bei den Quotientenräumen können wir hier nicht schließen.

Jede Umgebung aus der Umgebungsbasis von $G \otimes_\pi H$ hat die Form

$$\Gamma(\otimes(U \cap G, V \cap H)), \text{ mit } U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}$$

Das muß aber keine Umgebung des Unterraums sein, die Umgebungen der Unterraumtopologie $\mathcal{T}_U$ entstehen durch einen Schnitt mit $G \otimes H$, also

$$\Gamma(\otimes(U_1, V_1)) \cap G \otimes H, \text{ mit } U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}$$

Wir sehen, daß $\Gamma(\otimes(U \cap G, V \cap H)) \subseteq \Gamma(\otimes(U, V)) \cap G \otimes H$ gilt, also daß die rechte Seite auch eine Umgebung der Topologie $\mathcal{T}_\pi$ ist, das sagt uns aber nur wieder, daß die π-Topologie feiner als die Unterraumtopologie $\mathcal{T}_U$ ist.

Aber man kann umgekehrt im allgemeinen kein Rezept angeben, wie man aus U und V Umgebungen U_1 und V_1 bekommt, so daß

$$\Gamma(\otimes(U_1, V_1)) \cap G \otimes H \subseteq \Gamma(\otimes(U \cap G, V \cap H))$$

gilt.

Um ein konkretes Beispiel für eine solche Verletzung der Unterraumbedingung anzugeben, müßten wir die abstrakte Ebene verlassen. In [Jar81, 15.2.2, p. 327] findet man ein solches Gegenbeispiel.

Jetzt wenden wir uns dem ε-Tensorprodukt zu. Wir denken uns G' in E' eingebettet. Dann gilt $(U \cap G)^{\circ|G} = U^\circ \cap G'$, wobei das Polar auf der linken Seite der Gleichung in dem topologischen Vektorraum G ausgerechnet wird. Diese Formel ist eine einfache Umformulierung, denn $(U \cap G)^{\circ|G} = \{\xi \in G' : \langle \xi, x\rangle \in \mathbb{D}\ \forall x \in U\}$, eingebettet in E' sind das genau alle ξ, die ganz U in $\mathbb{D}$ abbilden und in G' liegen.

Folgende Mengen sind gleich, wenn wir $BC(G'_\sigma, H'_\sigma) = G \otimes_\varepsilon H \subseteq E \otimes_\varepsilon F = BC(E'_\sigma, F'_\sigma)$ identifizieren und einbetten:

$$U((U \cap G)^{\circ|G}, (V \cap H)^{\circ|H}) = U((U^\circ \cap G'), (V^\circ \cap H')) = U(U^\circ, V^\circ) \cap E \otimes_\varepsilon F$$

Also ist die Unterraumeigenschaft erfüllt. Die Quotienteneigenschaft ist nicht erfüllt (siehe [Jar81]). ■

Die Topologie von $E \otimes_\alpha F$ bezüglich einer Tensornorm $\underline{\alpha}$ liegt zwischen ε und π. Wenn α die Unterraumeigenschaft (genauso Quotientenraumeigenschaft) für alle endlichdimensionalen normierten Räume erfüllt, dann ist diese Eigenschaft auch für lokalkonvexe Vektorräume erfüllt.

3.5 Vervollständigung, nukleare Räume und integrale Bilinearformen

3.5.1 $E\hat{\otimes}F$ - Vervollständigung

In 3.2.1 haben wir gesehen, daß

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & E' \otimes F & \to & LC(E,F) \\ & \xi \otimes y & \mapsto & \langle \xi, \bullet \rangle \cdot y \end{array}$$

eine Einbettung ist, deren Bild genau die linearen stetigen Funktionen mit endlichem Rang sind. Die Elemente in $E' \otimes F$ sind nur endliche Summen, also können wir auch nicht mehr erwarten. Um alle linearen stetigen Abbildungen zu fassen, muß man einen Grenzprozeß anwenden.

Eine Möglichkeit ist die Vervollständigung der Topologie auf $E \otimes F$. Das Tensorprodukt $E \otimes_x F$ gemeinsam mit der vervollständigten Topologie bezeichnet man mit $E\hat{\otimes}_x F$, ein Element aus $k \in E\hat{\otimes}_x F$ heißt auch Kern (=kernel).

Durch die Methode der Vervollständigung erhält man z.B. auch (für Notationen und Beweise siehe [Tre70])

$$\mathcal{C}(K,E) \cong \mathcal{C}(K)\hat{\otimes}_\varepsilon E, \quad l^1(E) \cong l^1\hat{\otimes}_\varepsilon E \text{ oder } L^1(E) = L^1\hat{\otimes}_\pi E$$

Für das Resultat $E'\hat{\otimes}_x F \cong LC(E,F)$ mit $x = \pi$ oder ε sind zusätzliche Voraussetzungen von E und F erforderlich.

3.5.2 $\varepsilon = \pi$ - Nukleare Räume

Satz 3.4.4 zeigt uns, daß Unterraum bzw. Quotientenraumeigenschaft nicht selbstverständlich sind. Wenn $\varepsilon = \pi$ gilt, dann haben wir jedoch beide Eigenschaften.

Definition 3.5.1 *Ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum E mit der Hausdorffeigenschaft ist* nuklear $\Longleftrightarrow$*Für alle lokalkonvexen Vektorräume F gilt:*

$$E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$$

Endlichdimensionale Vektorräume sind klarerweise nuklear. In gewisser Weise sind nukleare Räume endlichdimensionalen Vektorräumen ähnlich. Sie haben viele Stabilitätseigenschaften (Unterräume, Produkte, Quotienten,... sind wieder nuklear). Jeder nukleare normierte Raum ist endlichdimensional.

Mit nuklearen Räumen können wir das Resultat aus der Motivation dieses Abschnitts formulieren:

Satz 3.5.2 *Seien E, F vollständig und nuklear, E tonneliert, und auch E' vollständig und nuklear. Dann gilt:*

$$E'\hat{\otimes}F \cong LC(E,F)$$

[Tre70] widmet ein Kapitel den Anwendungen des letzten Satzes (und der Nuklearität im allgemeinen) bei partiellen Differentialgleichungen, auch bei [Jar81] findet man viel über nukleare Räume und Anwendungen.

3.5.3 Der Dualraum von $E \otimes_\varepsilon F$

Den Dualraum von $E \otimes F$ versehen mit der projektiven Topologie, $BC(E,F)$, kennen wir schon, wir haben das π-Tensorprodukt ja genau so eingeführt, daß es das Tensorprodukt in der Multikategorie der multilinearen stetigen Abbildungen ist.

Nun wollen wir wissen, welche Definition der Multimorphismen zu dem injektiven Tensorprodukt führt. Wir werden $(E \otimes_\varepsilon F)'$ genauer untersuchen.

Die π-Topologie ist feiner als die ε-Topologie, also ist die algebraische Identität $i : E \otimes_\pi F \to E \otimes_\varepsilon F$ stetig. Die transponierte Abbildung

$$i^T : (E \otimes_\varepsilon F)' \to (E \otimes_\pi F)' \cong BC(E,F)$$

ist injektiv. Wir können also das Dual von $E \otimes_\varepsilon F$ als Teilraum $J(E,F)$ von $BC(E,F)$ auffassen. Wir nennen diese speziellen Bilinearformen integrale Bilinearformen. Warum? Weil diese Bilinearformen eine schöne Darstellung als Integrale haben.

Satz 3.5.3 $b \in J(E,F) \Longleftrightarrow$

$\exists\ A \subseteq E'_\sigma, B \subseteq F'_\sigma$, *beide abgeschlossen und gleichgradig stetig,*
$\exists\ \mu$ *Radonmaß (=von innen reguläres Borelmaß)* $\mu \leq 1$ *auf* $A \times B$,

so daß b die Integraldarstellung

$$b(x,y) = \int_{A\times B} \langle \xi, x\rangle \langle \eta, y\rangle \; d\mu(\xi,\eta)$$

hat.

Den Beweis kann der interessierte Leser bei [Tre70, Kap 49] nachschlagen, man braucht dazu aber Wissen aus der Theorie der Radonmaße, insbesondere den Darstellungssatz von Riesz, der eine Integraldarstellung jedes Funktionals aus $(C^0_c(K))'$, mit K kompakt, liefert. Mehr dazu auch in [Els96].

3.6 Tensoralgebra und äußere Algebra

Bisher haben wir, vor allem der Übersichtlichkeit halber, immer nur mit bilinearen Abbildungen und 2Morphismen gearbeitet. Natürlich funktioniert alles genauso, wenn man multilineare Abbildungen betrachtet.

Wir wollen nun die klassischen Begriffe der Multilinearen Algebra, also tensorielle Potenz, Alternierungsoperator, Keilprodukt, Tensoralgebra und äußere Algebra auf ihr Verhalten bei einer Topologisierung untersuchen.

${}^pE$ sei eine Abkürzung für p Kopien von E also ${}^pE := (\overbrace{E, E, \ldots, E}^{p\text{-Faktoren}})$. Wir mißbrauchen unsere bisherige Notation, und bezeichnen mit $B({}^pE, F)$ alle multilinearen Abbildungen von ${}^pE$ nach F. Uns interessiert vor allem $BHC_{\mathfrak{B}}({}^pE, F)$, der Raum aller ${}^p\mathfrak{B}$-hypostetigen multilinearen Abbildungen und $\bigotimes_{\mathfrak{B}}^p E$ das Tensorprodukt mit Multimorphismen $BHC_{\mathfrak{B}}({}^pE, F)$, auch tensorielle Potenz genannt.

In Erweiterung von $BHC_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(E, F; G)$ (2.2.3) ist eine Abbildung φ *${}^pB$-hypostetig* $\Longleftrightarrow$

$$\text{Für } i = 1, \ldots, p \text{ gilt} \quad \begin{array}{ll} \forall W \in \mathcal{W} & A_1, \ldots, \cancel{A_i}, \ldots, A_p \in \mathfrak{B}, \\ \exists U_i \in \mathcal{U}: & \varphi(A_1, \ldots, \overbrace{\cancel{A_i}}^{U_i}, \ldots, A_p) \subseteq W \end{array} .$$

Die Umgebungsbasis zur Topologie von $\bigotimes_{\mathfrak{B}}^p E$ wird wie in 3.3.2 durch

$$U(A_i^j, U_i) := \left\{ \sum x_k^1 \otimes \ldots \otimes x_k^p : \left(\begin{array}{c} \forall i \in \{1, .., p\} : \varphi(A_1^i, \ldots, \overbrace{\cancel{A_i^i}}^{U_i}, \ldots, A_p^i) \subseteq \mathbb{D} \\ \Downarrow \\ \sum \varphi(x_k^1, \ldots, x_k^p) \in \mathbb{D} \end{array} \right) \right\}$$

gegeben.

Für eine sinnvolle Theorie ist es notwendig, daß das ${}^p\mathfrak{B}$-Tensorprodukt assoziativ ist.

Lemma 3.6.1 *Für das ${}^p\mathfrak{B}$-Tensorprodukt gilt*[2]*:*

$$E \otimes F \otimes G \cong E \otimes (F \otimes G) \cong (E \otimes F) \otimes G.$$

Beweis. Die beiden Bedingungen aus 1.4.3 sind zu überprüfen. Wir beschränken uns beim Bildraum von φ auf $H = \mathbb{C}$. Für den allgemeinen Fall müßte man, ähnlich wie bei 3.3.2, zu der Umgebungsbasis $\{X^{\circ\bullet} : X \in \mathfrak{X}\}$ übergehen.

Sei also $\varphi :< E, F, G > \longrightarrow \mathbb{C}$ ${}^p\mathfrak{B}$-hypostetig. Aus

$$\varphi(U, B, C) \subseteq \mathbb{D} \text{ und } \varphi(A, V, C) \subseteq \mathbb{D}$$

folgt mit $C = \{c\}$ direkt, daß $\varphi_c = \varphi(\bullet, \bullet, c)$ ${}^p\mathfrak{B}$-hypostetig ist. Sei $c \in C$ und $z = \sum x_i \otimes y_i \in U(A, B, U, V)$, dann gilt weiters

$$f(z, c) = f_c(z) = \sum \varphi_c(x_i, y_i) \in \mathbb{D}$$

[2] Genauer: $(E \otimes F \otimes G, T_{3\mathfrak{B}}) \cong E \otimes_{\mathfrak{B}, \otimes(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})} (F \otimes_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}} G) \cong (E \otimes_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}} F) \otimes_{\otimes(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}), \mathfrak{B}} G$.

und daher $f(U(A,B,U,V),C) \subseteq \mathbb{D}$. Die Hypostetigkeit von f im zweiten Argument folgt direkt aus der noch nicht verwendeten Beziehung $\varphi(A,B,W) \subseteq \mathbb{D}$, denn dies ist nichts anderes als $f(\otimes(A,B),W) \subseteq \mathbb{D}$ ■

Wir sehen, daß die Definition der Umgebungsbasis symmetrisch ist, daher ist für jede Permutation $\sigma \in Sym(p)$ die Abbildung

$$\bar{\sigma} : \bigotimes_{\mathfrak{B}}^{p} E \to \bigotimes_{\mathfrak{B}}^{p} E : x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$$

stetig. In weiterer Folge ist auch der Alternierungsoperator

$$Alt = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in Sym(p)} sign(\sigma) \cdot \bar{\sigma} : \otimes^p E \to \otimes^p E$$

ein stetiger linearer Projektionsoperator in $\otimes_{\mathfrak{B}}^p E$.

Der Homomorphiesatz für Vektorräume erweitert sich auf topologische Vektorräume, das sieht man direkt in der Definition der Quotiententopologie 2.1.2. Daher können wir wie in der multilinearen Algebra das Keilprodukt definieren.

Definition 3.6.2 *Das* Keilprodukt *(=p-te äußere Potenz) von E,* $\bigwedge^p E = E \wedge E \wedge \ldots \wedge E$*, ist durch*

$$\bigwedge_{\mathfrak{B}}^{p} E := \left(\bigotimes_{\mathfrak{B}}^{p} E \right) \big/ \ker(Alt) \cong im(Alt)$$

gegeben. $Alt(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$ *beziehungsweise* $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p + \ker Alt$ *bezeichnen wir mit* $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$

Die Abbildung $\wedge := Alt \circ \otimes : {}^pE \to \bigwedge_{\mathfrak{B}}^p E$ ist ${}^p\mathfrak{B}$-hypostetig und alternierend. Aus der universellen Eigenschaft von $\otimes^p$ folgt schnell:

Lemma 3.6.3 $\bigwedge_{\mathfrak{B}}^p E$ *ist das Tensorprodukt zu den alternierenden* ${}^p\mathfrak{B}$*-hypostetigen Funktionen.*

Wir wollen einen Schritt weitergehen, und die Topologie auf die Tensoralgebra und die äußere Algebra erweitern. Das Tensorprodukt $\otimes_{\mathfrak{B}}$ ist distributiv über der direkten Summe $\oplus$, das heißt

$$\bigoplus_{(i,j) \in I \times J} E_i \otimes_{\mathfrak{B}} F_j \cong \left(\bigoplus_{i \in I} E_i \right) \otimes_{\mathfrak{B}} \left(\bigoplus_{j \in J} F_j \right).$$

Daher können wir die Tensoralgebra

$$\bigotimes E := \bigoplus_{p \geq 0} \bigotimes^{p} E$$

und die äußere Algebra

$$\bigwedge E := \bigoplus_{p \geq 0} \bigwedge^{p} E$$

jeweils mit der Produkttopologie versehen. Man rechnet nach, daß dann die Abbildungen $\otimes : \bigotimes_{\mathfrak{B}} E \times \bigotimes_{\mathfrak{B}} E \to \bigotimes_{\mathfrak{B}} E$ und die Abbildung $\wedge : \bigwedge_{\mathfrak{B}} E \times \bigwedge_{\mathfrak{B}} E \to \bigwedge_{\mathfrak{B}} E$ hypostetig sind.

Die äußere Algebra hat, in Anschluß an den dritten Teil der Motivation dieser Arbeit, Anwendungen in der Theorie der Differentialformen, siehe [Fis63].

Der symmetrische Operator $Sym : \otimes^p E \to \otimes^p E$ entsteht, wenn man bei der Definition des Alternierungsoperator das Vorzeichen $sign(\sigma)$ wegläßt. In weiterer Folge kann man analog zur äußeren Algebra die symmetrische Algebra $\bigvee_{\mathfrak{B}} E := \bigoplus \bigvee_{\mathfrak{B}}^p E$ konstruieren, die nichts anderes als die Polynomalgebra ist. Die Topologien auf der symmetrischen Algebra werden daher auch bei der Untersuchung von Polynomen verwendet, siehe [Flo97].

Symbolverzeichnis

Allgemeine Bezeichnungen

$\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ Einheitskreisscheibe $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ 31

$b(\bullet, y)$ Funktion im ersten Argument bei Festhalten des zweiten Arguments, also $x \mapsto b(x, y)$

$b_1, \ldots, \cancel{b_i}, \ldots b_r$ Liste ohne b_i, also $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1} \ldots b_r$

$t(E)$ Bild der Abbildung t

Kategorien und universelle Algebra

$Ob_{\mathfrak{C}}$ Objekte einer Kategorie 6

$Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ Morphismen einer Kategorie 6

$MultiMor_{\mathfrak{M}}(A_1 ... A_n; C)$ Multimorphismen einer Multikategorie 9

$< A, B > \longrightarrow C$ Multimorphismus in zwei „Argumenten“ 9

$2Mor_{\mathfrak{M}}(A, B; C)$ Multimorphismus in zwei „Argumenten“ 9

$\otimes$ Tensorprodukt in einer Multikategorie 13

$A \otimes B$ Tensorprodukt von A und B in einer Multikategorie 13

$\mathfrak{K1}$ einelementige Kategorie = Monoid 7

$\mathfrak{Set}$ Kategorie der Mengen und Funktionen 7

$\mathfrak{Topvect}$ Kategorie der topologischen Vektorräume und stetigen linearen Abbildungen 7

$\mathfrak{lcVect}$ Kategorie der lokalkonvexen Vektorräumen und stetigen linearen Funktionen 34

$\mathfrak{Vect}_{\mathbb{K}}$ Kategorie der lokalkonvexen Vektorräumen und linearen Abbildungen 7

Vektorräume und topologische Vektorräume

E^* bezeichnet den algebraischen Dualraum, E' den topologischen Dualraum. Elemente von E' (oder E^*) bezeichnen wir mit griechischen Buchstaben ξ, η und nicht mit x', y'. Diese oft verwendete Notation verbindet man nämlich mit einer natürlichen Abbildung $' : x \to x'$, die es nicht gibt.

$[A]$ Lineare Hülle von A

$\Gamma(A)$ Konvexe Hülle von A 34

f^T transponierte Abbildung von f

$G \leq E$ Bei (topologischen, normierten) Vektorräumen: G Unterraum von E

K_E Einheitskugel $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ im normierten Raum E

$LC(E, F)$ lineare stetige Funktionen (=linear continuous functions)

$B(E, F; G)$ Bilineare Funktionen 39

$BSC(E, F; G)$ Bilineare getrennt stetige Funktionen (=bilinear seperately continuous functions) 39

$BC(E, F; G)$ Bilineare hypostetige Funktionen (=bilinear continuous functions) 39

$BH_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}C(E, F; G)$ Bilineare hypostetige Funktionen bezüglich zweier Bornologien 40

$BHC(E, F; G)$ Bilineare hypostetige Funktionen (=bilinear hypo-continuous functions) 40

$J(E, F)$ integrale Bilinearformen 65

$\mathcal{U}_{(x)}$ Umgebungsfilter von x 30

$\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ Einheitskreisscheibe $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ 31

$\mathbb{D}W$ 31

λA 31

$W + V$ 31

A° Polar einer Menge 36

$B^\bullet$ 37

E'_σ topologischer Dualraum mit Topologie der punktweisen Konvergenz = schwache duale Topologie 38

E'_γ topologischer Dualraum mit Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf konvex-kompakten Mengen 38

E'_c topologischer Dualraum mit Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen 38

E'_b topologischer Dualraum mit Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen = starke duale Topologie 38

$Fin(E)$ Menge aller endlichen Teilmengen von E 38

$BHC_\varepsilon(E'_b, F'_b)$ Bilineare hypostetige Funktionen versehen mit der ε Topologie (gleichmäßige Konvergenz auf gleichgradig stetigen Mengen) 49

$E \otimes_\varepsilon F$ injektives Tensorprodukt von E und F 50

$E \otimes_\pi F$ projektives Tensorprodukt von E und F 54

$E \otimes_{in} F$ induktives Tensorprodukt von E und F 51

$E \otimes_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} F$ Tensorprodukt von E und F zu den 2Morphismen $BH_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}C(E, F; G)$ 51

$E \otimes_\alpha F$ Tensorprodukt von E und F, als normierter Raum mit der Tensornorm α 60

$E \hat{\otimes}_x F$ Vervollständigung des $\otimes_\alpha$-Tensorprodukts 64

$\bigwedge^p_{\mathfrak{B}} E$ Keilprodukt (=äußeres Potenz) mit der ${}^p\mathfrak{B}$-Topologie 67

$\bigotimes^p_{\mathfrak{B}} E$ tensorielle Potenz 66

${}^pE$ p Kopien von E also ${}^pE := (E, E, \ldots, E)$ 66

Literaturverzeichnis

[AM75] Arbib, Michael A. & Manes, Ernest G. *Arrows, structures, and functors*. Acad. Press, 1975

> Locker geschriebene Einführung in die Kategorientheorie. Überdeckt viele Teilgebiete, ohne so weit wie [Mac98] is Detail zu gehen. Am Anfang wird jedoch in der Kategorie der Mengen gearbeitet, für Anfnger kommt es nicht klar heraus, daß es sich nur um einen Spezialfall handelt. Enthält auch eine gute kurze Einführung in Kategorien mit Struktur und Automaten.

[Bou] Bourbaki, N. *Topological vector spaces*. Springer

[Els96] Elstrod, Jürgen. *Maß und Integrationstheorie*. Springer, 1996

[Fis63] Fischer, H. R. *Über eine Klasse topologischer Tensorprodukte*. Math. Annalen, 150:pp. 242–258, 1963

> Untersucht das Tensorprodukt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-hypostetigen bilinearen Abbildungen. ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Bornologien, hypostetig = quasistetig). Dabei zeigt Fischer, ohne ins Detail zu gehen, auch Verbindungen zu Differentialformen auf.

[Flo97] Floret, Klaus. *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces.*, 1997
URL `http://www.mathematik.uni-oldenburg.de/preprints/get/so%urce/symm-r.pdf`

[Fra76] Fraser, Grant A. *The Semilattice Tensor Product of Distributive Lattices*. Trans. Am. Math. Soc., 217:pp. 183–194, 1976

[Gal88] Galanovà, Jana. *The Tensor Product on a Variety*. In Hałkowska & Stawski, Hg., *Universal and applied Algebra, Turawa*. 1988

> Galanovà untersucht Beziehungen zwischen dem Tensorprodukt auf Varietäten, Unteralgebren und idempotenten Algebren.

[Gre93] Greub, W. H. *Multilineare Algebra*. 1. Aufl., 1993

[Gro55] GROTHENDIECK, A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*. Memoirs AMS, 2, 1955

Grothendieck führt hier erstmals projektives und injektives Tensorprodukt und Tensornormen ein. Das Originalwerk ist aufgrund des Druckes und der Darstellung nicht einfach lesbar.

[Har82] HARKSEN, J. *Charakterisierung lokalkonvexer Räume*. Math Nachr., 106, 1982

Untersucht Tensornormtopologien zwischen π und ε, Unterraum- und Quotienteneigenschaften, auch konkret auf L^p Räumen.

[HS73] HERRLICH, HORST & STRECKER, GEORGE E. *Category Theory*. Allyn and Bacon Inc., 1973

Hier werden, neben einer Einführung in die Kategorientheorie auch mehrere Möglichkeiten der Fundierung der Kategorientheorie betrachtet.

[Jar81] JARCHOW, HANS. *Locally convex spaces*. Teubner, 1981

[JW95] JUST, WINFRIED & WEESE, MARTIN. *Discovering modern set theory I*. American Mathematical Society, 1995

Eine ausgezeichnete Einführung in die Mengenlehre. Das Buch wird immer wieder mit Bonmots aufgelockert. Aufgaben im Text motivieren den Leser auch aktiv mitzulesen.

[Kö79] KÖTHE, GOTTFRIED. *Topological vector spaces 1,2*. 1960 bzw 1979

[Lam89] LAMBEK, J. *Multicategories revisited*. In *Categories in computer science and logic (Boulder, CO, 1987)*, 217–239. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989

[Mac98] MAC LANE, SAUNDERS. *Categories for the working mathematician*. Springer, 1998

Das klassische Werk über Kategorien von einem der Begründer der Kategorientheorie. In der 2.Auflage sind auch neuere Entwicklungen, eine umfangreiche Bibliographie und historische Bemerkungen enthalten.

[Mit69] MITCHELL, BARRY. *Theory of Categories*. Acad. Press, 1969

[Sch] SCHATTEN, ROBERT. *A theory of cross norms*

Originalarbeit von Schatten über Normen auf Tensorprodukten. Robert Schatten führt hier π und ε - Normen ein.

[Tre70] TREVES, FRANCOIS. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press, 1970

Nach jedem Kapitel abstrakter Funktionalanalysis folgen auch Kapitel über konkrete Funktionenräume und Distributionen. Viel über Tensorprodukttopologien in Richtung nukleare Räume. Mit längeren Kapiteleinführungen und Erklärungen.

[Zad79] ZADDACH, ARNO. *Graßmanns Algebra in der Geometrie*. 1979

Einführung und insbesondere Geschichte der multilinearen Algebra gut dargestellt, aber es wird öfter als notwendig mit Basen gearbeitet.

[ZS79] ZBIGNIEW & SEMADENI. *Einführung in die Theorie der Kategorien und Funktoren*. Teubner, 1979

Enthält viele Beispiele in mehreren Richtungen, z.B. Theorie der Automaten.