

Diplomarbeit

zum Thema

Konstruktive Behandlung von Schraub- und Spiralflächen mit CAD-Software anhand ausgewählter Beispiele für den Schulunterricht

ausgeführt am

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

Ao. Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Rath

und

Vertr.Ass. Dr. Andreas Asperl

als verantwortlich mitwirkender Assistent

durch

Ruth Grader

1080 Wien, Langegasse 44

Wien, März 2004

Vorwort

Im Laufe meines Studiums lernte ich die faszinierenden Möglichkeiten von CAD-Paketen kennen und konnte bei verschiedenen Anlässen, wie Lehrveranstaltungen, Einführungs- und Übungsphase, Erfahrungen sammeln und einen Einblick in die Anwendungen im Schulunterricht gewinnen. Nicht nur die erstellten Zeichnungen begeisterten mich für die Verwendung von CAD-Software, sondern auch die neuen Aufgabstellungen und das damit verbundene entdeckende Lernen. Oft hat mich der Arbeitsaufwand abgeschreckt mich den Herausforderungen des Unterrichtens mit modernen Medien zu stellen. Mit dieser Arbeit habe ich mich gegen meine Bequemlichkeit und für ein Unterrichten mit CAD-Paketen entschieden. Ich hoffe, die von mir ausgearbeiteten Beispiele sind für andere Motivation und Hilfe den Computer in den Geometrieunterricht einzubinden.

Mein Dank gilt meinen Betreuern, Univ.-Prof. Dr. Rath und Dr. Asperl, für die engagierte Betreuung, die bereichernden Anregungen und die ausdauernde Geduld.

Meinen Eltern möchte ich auf diesem Weg für das Ermöglichen meines Studiums durch ihre großzügige finanzielle Unterstützung danken.

Am meisten Mut, wenn ich an meinem Studium oder dem Arbeiten an der Diplomarbeit verzweifelt bin, haben mir meine Freundin und Studienkollegin Biene, sowie mein Verlobter Michael zugesprochen. Voller Dankbarkeit schaue ich auf ihre Unterstützung und Hilfestellungen zurück und hoffe sie noch oft in meinem Leben erfahren zu dürfen.

Für die Hilfe bei den Fotos, mit dem Computer und dem Literaturverzeichnis bedanke ich mich bei Eva, Daniel, Judika, Florian, Paul, Rupert und Geli.

„Last but not least“ möchte ich Jesus danken, dass er mich stets getragen und begleitet hat.

Kurzfassung

Die vorliegende Diplomarbeit behandelt Schraub- und Spiralfächen sowohl theoretisch als auch praktisch anhand von Beispielen. Die Arbeit soll einen Zusammenhang zwischen altbekanntem Wissen und den modernen Medien schaffen. Dadurch werden Fragestellungen von Interesse, die vor dem Verwenden von CAD-Paketen nicht relevant waren: „Wie kann man eine Schraubfläche einfach approximieren?“, „Welche verschiedenen Werkzeuge eignen sich für die Konstruktion von Spiralfächen?“...

Diese und noch mehr Fragestellungen wurden von mir anhand von MicroStation Version 8.1 bearbeitet, wobei die Ausführungen aus einem für CAD-Programme allgemein gültigen und einem speziell für MicroStation zugeschnittenen - kursiv gehaltenen - Teil bestehen.

Der Inhalt ist in folgende Kapitel gegliedert:

Im ersten und zweiten Kapitel werden die theoretischen Grundlagen von Schraub- und Spiralfächen behandelt. Ausgehend von den Transformationen Schraubung, Spiralisierung und Helispiralisierung werden zuerst die jeweiligen Bahnkurven eingeführt und diskutiert und anschließend die entstehenden Schraub-, Spiral- und Helispiralfächen untersucht. Die Aussagen sind sowohl konstruktiv als auch analytisch beschrieben. Dieses klassische geometrische Wissen stellt die Basis für das Arbeiten mit Schraub- und Spiralfächen in CAD-Programmen dar.

Der Inhalt des dritten Kapitels setzt sich mit der Frage auseinander auf welche Art und Weise Schraub- und Spiralfächen in CAD-Programmen dargestellt werden. Da Objekte, die unter einer Schraubung und Spiralisierung entstehen, im Allgemeinen von CAD-Programmen nicht exakt darstellbar sind, werden die zur Approximation herangezogenen Kurven und Flächen untersucht. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf den Bezier-Kurven und -Flächen.

Im vierten Kapitel wird das erlangte Wissen über Schraubflächen durch Beispiele realisiert. Dies erfolgt vorwiegend mit dem Werkzeug „Schraubfläche konstruieren“, was die bequemste, aber nicht einzige Methode ist, Schraubflächen zu erstellen. Wie andere Werkzeuge, die ebenfalls zur Konstruktion herangezogen werden können, funktionieren, wird im fünften Kapitel behandelt. Die Diskussion der verschiedenen Werkzeuge wird sowohl für Schraubflächen als auch für Spiral- und Helispiralfächen durchgeführt. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der konstruierten Flächen ist die Krümmungsanalyse der Fläche.

Das in Kapitel fünf erarbeitete Wissen kommt in Kapitel sechs, bei der Erstellung von Spiralfächen, zur Anwendung, da es nicht von vornherein klar ist, welches

Werkzeug am geeignetsten für die Konstruktion von Spiralfächen ist. Die behandelten Beispiele kommen aus der Natur.

Im Anhang befinden sich Arbeitsblätter zu den in Kapitel vier und sechs beschriebenen Beispielen, die für den Schulunterricht genutzt werden können. Außerdem habe ich einen Index der MicroStation-Werkzeuge erstellt, die bezüglich des Inhalts der Arbeit besondere Bedeutung haben.

Die Arbeitsblätter sowie die fertigen Zeichnungen der Beispiele und die ganze Arbeit sind auf der beigelegten CD gespeichert. Einige der Materialien können im Internet unter <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/student/grader> gefunden werden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	2
Kurzfassung.....	3
1 Allgemeines über Schraubflächen.....	8
1.1 Schraubung.....	8
1.2 Schraublinie	9
Konstruktion von Punkten, Tangenten und Krümmungskreisen	12
1.3 Schraubfläche	13
2 Allgemeines über Spiralfächen.....	15
Überblick und Vergleich.....	15
2.1 Spiralisierung.....	15
2.1.1 Ebene Spiralisierung.....	16
2.1.2 Logarithmische Spirale	17
2.1.3 Räumliche Spiralisierung.....	18
2.1.4 Zylindro-konische Spiralen.....	19
2.2 Helispiralisierung.....	21
2.2.1 Ebene Helispiralisierung.....	21
2.2.2 Archimedische Spirale	22
2.2.3 Räumliche Helispiralisierung.....	23
2.2.4 Helispirale.....	24
2.3 Spiralfächen und Helispiralfächen	25
3 Kurven und Flächen im CAGD	27
3.1 Freiformkurven.....	27
3.1.1 Bezier-Kurve.....	28
Bernstein-Polynome	28
3.1.2 Rationale Bezier-Kurven.....	31
3.1.3 Zusammengesetzte Bezier-Kurven	32
3.1.4 Exakte Darstellung oder Approximation.....	35
3.1.5 B-Spline-Kurven.....	35

3.1.6	Beispiele von Kurven	37
3.2	Freiformflächen.....	38
3.2.1	Bezier-Flächen	38
3.2.2	Rationale Flächen.....	40
3.2.3	Exakte Darstellung oder Approximation.....	40
3.2.4	B-Spline-Flächen	41
3.2.5	Schraub-, Spiral- und Helispiralflächen	41
4	Beispiele für Schraubflächen.....	42
4.1	Allgemeine Schraubfläche	42
4.1.1	Schraublinie	42
	Beispiel: Klangstäbe.....	42
4.1.2	Allgemeine Schraubfläche	46
	Beispiel: Schraubfläche mit Profilkurve in Form eines Pilzes.....	46
4.2	Kreisschraubflächen	51
4.2.1	Meridiankreisschraubfläche	51
	Beispiel: Rundgewinde	52
4.2.2	Schichtenkreisschraubfläche	54
	Beispiel: Geschwungene Säule	55
4.2.3	Schraubrohrläche.....	57
	Beispiel: Radständer	57
4.3	Regelschraubfläche.....	61
4.3.1	Wendelfläche	61
	Projekt: Radrampe auf die Floridsdorferbrücke	61
5	Diskussion von verschiedenen Werkzeugen.....	69
5.1	Schraubflächen.....	69
5.1.1	Werkzeug für Schraubflächen	69
5.1.2	An zwei Linien extrudieren	71
5.1.3	Über Netz konstruieren	73
5.1.4	Über Schnitt konstruieren	75
5.1.5	Freiformfläche	76

5.1.6	Schlussbemerkung.....	78
5.2	Spiral- und Helispiralflächen.....	79
5.2.1	Werkzeug für Schraubflächen	79
5.2.2	Über Schnitt konstruieren	80
5.2.3	Über Netz konstruieren	82
5.2.4	An zwei Linien extrudieren	82
5.2.5	Schlussbemerkung.....	83
6	Beispiele für Spiralfächen.....	84
6.1	Helispiralflächen.....	84
	Beispiel: Horn einer Hirschziegenantilope	84
	Variationen der Konstruktion von Helispiralen	87
	Profilkurven in allgemeinen Ebenen	88
6.2	Spiralfächen.....	89
	Beispiel: Muschel	89
Anhang	96
	Arbeitsblatt Klangstäbe	97
	Arbeitsblatt Schraubfläche mit Profilkurve in Form eines Pilzes.....	98
	Arbeitsblatt Rundgewinde	100
	Arbeitsblatt Geschwungene Säule	102
	Arbeitsblatt Radständer	103
	Arbeitsblatt Horn einer Hirschziegenantilope	105
	Arbeitsblatt Muschel	106
Werkzeugindex	108
Literaturverzeichnis	109

1 Allgemeines über Schraubflächen

Wird eine Figur einer Schraubung unterworfen, so überstreicht sie ein in sich verschraubbares Gebilde. Auf dieser Tatsache beruhen die meisten technischen Anwendungen. Vorwiegend dienen Schraubgebilde und davon abgeleitete Formen dazu, eine Drehung in eine Schiebung umzuwandeln: Stell- und Befestigungsschrauben, Spindelpressen, Förderschnecken, Schiffs- und Luftschrauben, Propellerpumpen und Ventilatoren. Beispiele für den umgekehrten Zweck, die Umwandlung einer Schiebung in eine Drehung, sind seltener: Drillbohrer, Turbinen und Windmotoren.

1.1 Schraubung

Definition

Eine *Schraubung* längs der Schraubachse a ist die Zusammensetzung einer Drehung um a und einer dazu proportionalen Schiebung längs a . Die Drehung bzw. Schiebung muss verschieden von der Identität sein.

Nach Wahl einer Orientierung der Schraubachse a bezeichnet λ das orientierte Bogenmaß des Drehwinkels und l die orientierte Schieblänge. Das konstante Verhältnis $p = l/\lambda$ heißt dann *Schraubparameter*.

Einer vollen Umdrehung um die Achse a ($\lambda = 2\pi$) entspricht als Schieblänge die *Ganghöhe* $h = 2p\pi$.

Eine Schraubung mit $p > 0$ heißt *Rechtsschraubung*, mit $p < 0$ *Linksschraubung*. Betrachtet man eine Rechtsschraubung in Schiebrichtung, so erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn.

Der Fall $p = 0$ ist eine Drehung, da der Schiebanteil verschwindet. Die Drehung und die reine Schiebung stellen die Sonderfälle der Schraubung dar.

Die Bedeutung der Schraubung für die räumliche Bewegungslehre ergibt sich aus der Eigenschaft, dass sich zwei beliebige Lagen eines starren Gebildes stets durch eine Schraubung ineinander überführen lassen.

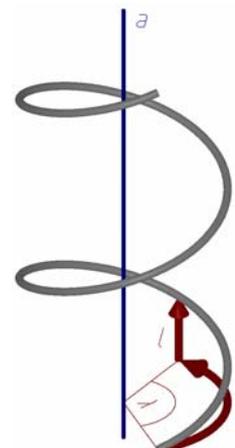


Abb.1.1: Schraubung

Analytische Darstellung

Eine Schraubung mit festem Wert λ bezeichnet man als diskrete Schraubung. Die Bewegung transportiert jedes Objekt in eine neue Lage. Jeder Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ geht dabei in einen Punkt $P = (x, y, z)$ über. Verwendet man die positiv orientierte z -Achse eines kartesischen Rechtssystems als orientierte Schraubachse a und sei λ das orientierte Drehwinkelmaß und l die orientierte Schieblänge, so beschreiben wir die Bewegung mit Hilfe von Vektoren durch:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \cdot \lambda \end{pmatrix}$$

Die Matrix stellt die Drehung um den festen Winkel λ dar und der Vektor $(0, 0, p\lambda)$ die Schiebung. Daraus ergeben sich für x , y und z folgende Gleichungen:

$$x = x_0 \cdot \cos \lambda - y_0 \cdot \sin \lambda, \quad y = x_0 \cdot \sin \lambda + y_0 \cdot \cos \lambda, \quad z = z_0 + p \cdot \lambda$$

Man spricht von einer stetigen Schraubung, wenn $\lambda \in \mathbf{R}$ bzw. $\lambda \in I \subset \mathbf{R}$.

1.2 Schraublinie

Definition

Die Bahnkurve eines Punktes (der nicht der Schraubachse angehört) unter einer Schraubung heißt *Schraublinie*.

Analytische Darstellung

Um die Bahnkurve eines Punktes $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ zu erzeugen, muss λ ganz \mathbf{R} bzw. ein Intervall I aus \mathbf{R} durchlaufen. Um eine einfache Darstellung zu erhalten, wählen wir einen Punkt der x -Achse: $P_0 = (r, 0, 0)$. Die Normalform der Schraublinie lautet also

$$x = r \cdot \cos \lambda, \quad y = r \cdot \sin \lambda, \quad z = p \cdot \lambda \quad (r, p \text{ konstant und } \lambda \in \mathbf{R})$$

Normalrisse

Die Gleichungen für y und z beschreiben den Normalriss auf die yz -Ebene ($x=0$). Aus $\lambda = z/p$ folgt $y = r \cdot \sin \frac{z}{p}$, was beweist, dass es sich dabei um eine Sinuslinie handelt.

Allgemein gilt: Der Normalriss einer Schraublinie auf eine zur Schraubachse parallele Ebene ist eine Sinuslinie. Sie hat die Ganghöhe $h = 2p\pi$ als Periode. Der Normalriss auf die xy -Ebene ist ein Kreis mit Radius r , was sich wiederum aus den Gleichungen für x und y ablesen lässt. Daraus folgt:

Schraubzylinder

Die Schraublinie verläuft als Ganzes auf einem erstprojizierenden Drehzylinder (*Schraubzylinder*), dessen Achse die Schraubachse ist und dessen Grundriss mit dem der Schraublinie übereinstimmt. Er wird von einer, seiner zu a parallelen, Erzeugenden im Laufe der Schraubung unendlich oft überstrichen. Mit Hilfe des Schraubzylinders definieren wir den *Radius der Schraublinie*: Der Radius der Schraublinie ist der Radius des Schraubzylinders.

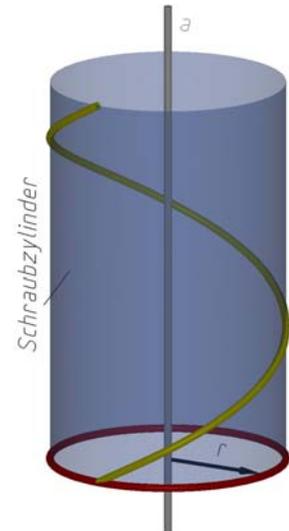


Abb.1.2: Schraubzylinder

Steigung

Einige Eigenschaften einer Schraublinie lassen sich mittels der Steigung zeigen. Bei lotrechter Schraubachse können alle Punkte einer Schraublinie durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \lambda \\ r \cdot \sin \lambda \\ p \cdot \lambda \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Um den Tangentenvektor zu erhalten, leiten wir nach λ ab:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin \lambda \\ r \cdot \cos \lambda \\ p \end{pmatrix}$$

Dadurch wird ersichtlich, dass die z -Komponente des Tangentenvektors konstant ist. Da auch $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 = const$ gilt, bedeutet dies, dass die Tangenten einer Schraublinie die Erzeugenden des dazugehörigen Schraubzylinders unter konstantem Winkel schneiden¹ und damit (bei dieser Aufstellung) auch die horizontale xy -Ebene (*Böschungslinie*)².

¹ Eine Kurve, die die Erzeugenden des Zylinders unter konstantem Winkel schneidet, heißt *Zylinderloxodrome*.

² Eine *Böschungslinie* ist eine Kurve, deren Tangenten mit der waagrecht Ebene einen festen Winkel einschließen.

Abwicklung

In der Abwicklung des Schraubzylinders erscheint die Schraublinie als Gerade³, da der Winkel zwischen Zylindererzeugenden und Schraublinie konstant ist. Weiters ergibt sich für den Steigungswinkel α folgende Formel:

$$\tan \alpha = \frac{h}{2\pi r}$$

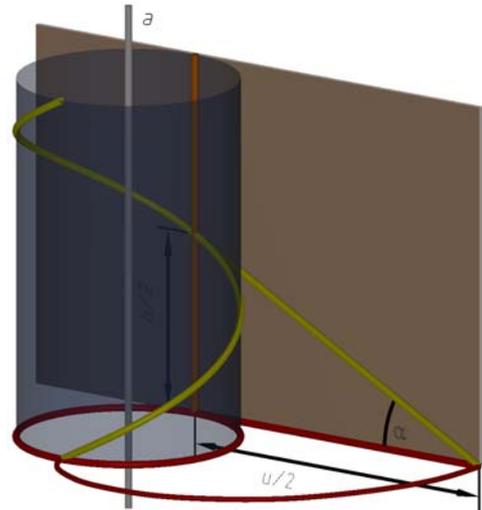


Abb.1.3: Abwicklung

Schmiegebene

Die Schmiegebene in einem Punkt P an eine Schraublinie wird durch die Tangente und die Normale auf die Achse durch P aufgespannt. Sie steht auch normal auf die Tangentialebene an den Schraubzylinder.

Krümmung

Da die Schraublinie eine in sich selbst verschraubbare Kurve ist, hat sie in allen Punkten denselben Krümmungsradius. Die Schraublinie liegt auf dem Schraubzylinder und der Krümmungskreis liegt in der Schmiegebene. Schneidet man den Schraubzylinder mit der Schmiegebene in einem Punkt, so erhält man eine „Schmiegeellipse“, wobei der Nebenscheitel in P fällt. Die Länge der Nebenachse entspricht dem Radius der Schraublinie. Die Hauptachsenlänge a lässt sich aus einem

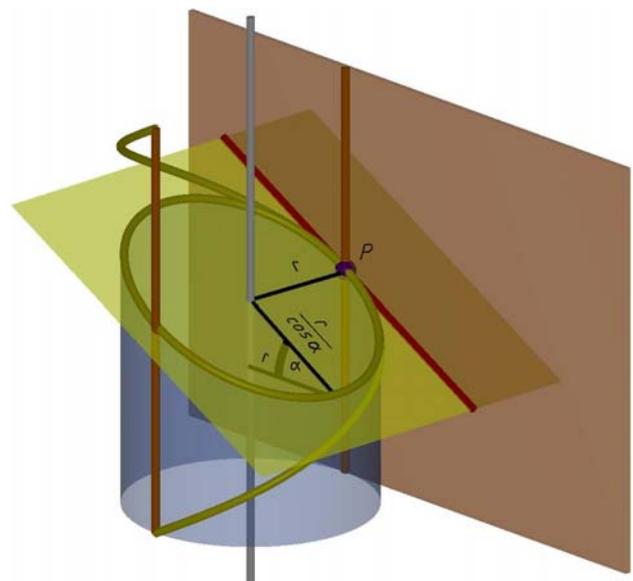


Abb.1.4: Krümmungsellipse

Seitenriss, in dem die Schmiegebene projizierend ist, leicht ablesen: $a = r/\cos \alpha$. Aus der Konstruktion für den Krümmungskreis im Nebenscheitel der Ellipse ergibt sich als Krümmungsradius für die Schraublinie: $\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$

³ Eine Kurve einer abwickelbaren Fläche heißt *geodätische Linie*, wenn ihre Abwicklung auf einer Geraden liegt.

Konstruktion von Punkten, Tangenten und Krümmungskreisen

Für die folgenden Konstruktionsbeschreibungen ist die z -Achse die Schraubachse a einer Rechtsschraubung mit Ganghöhe h . Verschraubt wird der Punkt $(0, -r, 0)$.

Punkte

Für die punktweise Konstruktion der Schraublinie verwenden wir die Eigenschaft „Schieblänge ist proportional zum Drehwinkel“ ($l = p\lambda$).

Der Grundriss der Schraublinie s fällt mit dem des Schraubzylinders zusammen und ist ein Kreis mit dem Radius r . Diesen Kreis unterteilen wir in n gleiche Teile. Um von einem Punkt zum nächsten zu gelangen, drehen wir um $\lambda = 2\pi/n$. Die Differenz der z -Koordinaten aufeinander folgender Punkte beträgt

$$\text{also } l = \frac{2\pi p}{n} = \frac{h}{n}.$$

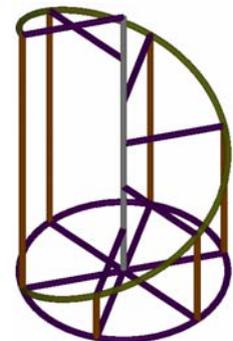


Abb.1.5

Tangenten

Wir verschieben die Tangente eines Punktes P parallel durch den Punkt $R=(0,0,p)$ (*Richtpunkt*). Diese Gerade \bar{t} lässt sich in Parameterdarstellung schreiben als:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \lambda \\ r \cos \lambda \\ p \end{pmatrix}$$

Um den Schnittpunkt T_u mit π_1 zu erhalten, setzen wir $v = -1$. Daraus folgt

$T_u = (r \sin \lambda, -r \cos \lambda, 0)$ (*Fluchtpunkt der Schraubtangente t*).

$P' = (r \cos \lambda, r \sin \lambda, 0)$ ist der Grundriss von P . Vergleicht man die beiden Koordinaten, stellt man fest, dass T_u durch eine negative Vierteldrehung aus P' entsteht. Daraus folgt die wichtige Regel:

Bei lotrechter Achsenlage ergibt sich die Richtung der Schraubtangente eines Punktes P , wenn man seinen Grundrisspunkt P' einer negativen Vierteldrehung um die Achse unterwirft und den so erhaltenen Punkt T_u mit dem Richtpunkt R verbindet.

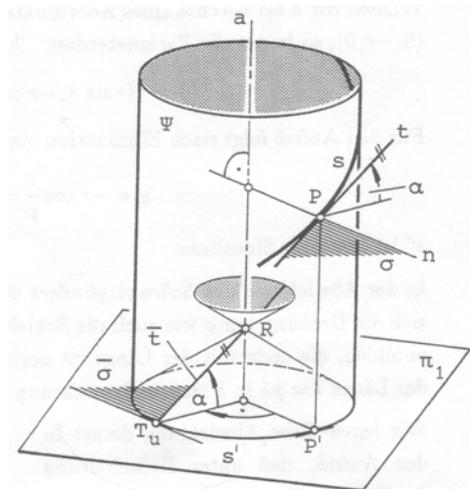


Abb.1.6: Tangentenkonstruktion, Stachel H.,1998, S. 258

\bar{t} ist eine Erzeugende des Drehkegels (*Richtkegels*) mit der Spitze R durch den Grundriss der Schraublinie. Durchläuft ein Punkt die Schraublinie, überstreicht \bar{t} dabei den Richtkegel.

Schmiegebene

Die Schmiegebene in einem Punkt der Schraublinie ist parallel zur Tangentialebene an den Richtkegel, die ihn entlang \bar{t} berührt, weil die Normale auf den Schraubzylinder in P parallel zur Tangente an den Basiskreis im Punkt T_u ist.

Krümmungsradius

Der Krümmungsradius $\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$ lässt sich mit Hilfe des Aufrisses des Richtkegels einfach konstruieren.

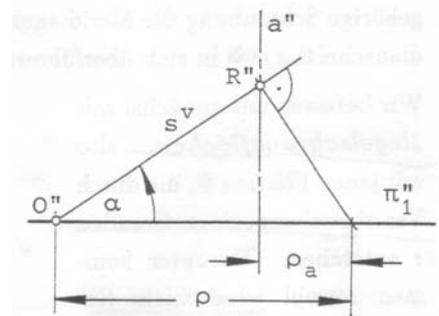


Abb.1.7: Krümmungsradius, Stachel H.,1998, S. 259

1.3 Schraubfläche

Definition

Durch Verschrauben einer Kurve e entsteht eine *Schraubfläche*, vorausgesetzt, dass e keine Bahnkurve ist. Sie enthält einerseits die Bahnen aller Punkte von e und andererseits alle (zueinander kongruenten) Schraublagen von e . Die beiden Scharen von Kurven überziehen die Fläche mit einem Netz.

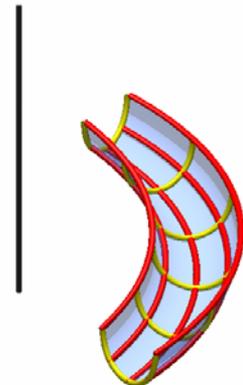


Abb.1.8: Netz über Schraubfläche

Analytische Darstellung

Sei e beschrieben durch $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ mit t als Parameter. Setzt man e in die Formel für die Schraubung ein, erhält man eine allgemeine Parameterdarstellung für Schraubflächen (t und λ sind die Parameter).

$$x = x_0(t) \cdot \cos \lambda - y_0(t) \cdot \sin \lambda, \quad y = x_0(t) \cdot \sin \lambda + y_0(t) \cdot \cos \lambda, \quad z = z_0(t) + p \cdot \lambda$$

Querschnitte und Meridiane

Unter den verschiedenen Schnitten einer Schraubfläche sind die Schnitte mit Ebenen durch die Achse (*Meridianschnitte*) und normal zur Achse (*Querschnitte*) besonders interessant. Ihre Gestalt ist kennzeichnend für die Form der Fläche. Je zwei

Querschnitte und je zwei Meridiane sind kongruent, sie lassen sich durch Verschrauben ineinander überführen. Somit kann die gleiche Schraubfläche auch erzeugt werden, indem man einen dieser Schnitte verschraubt.

Meridiane werden häufig bei der Festlegung von Gewinden verwendet. Wie sich eine Schraublinie nach einem Gang wiederholt, so wiederholt sich auch die Schraubfläche und damit auch der Meridian. Da für die Erzeugung der Schraubfläche eines dieser kongruenten Teilstücke genügt, nennen wir dieses bereits Meridian.



Abb.1.9 Meridianschnitt

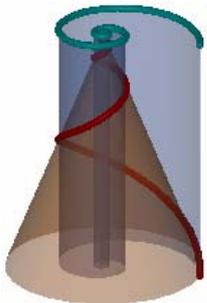
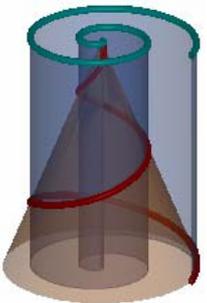
Tangentialebene

Durch jeden Punkt der Schraubfläche geht eine Schraublinie und eine Lage der erzeugenden Kurve. Die Tangenten an beide Kurven spannen die Tangentialebene auf. In der Tangentialebene eines Punktes liegen auch die Tangenten an den Quer- bzw. Meridianschnitt durch diesen Punkt.

2 Allgemeines über Spiralfächen

In diesem Kapitel behandeln wir zwei Arten von Spiraltungen, die beide in der Natur vorkommen. Eine Spiraltung wird durch zwei Bewegungen zusammengesetzt: eine Drehung um eine Achse a und eine zentrische Ähnlichkeit mit dem Zentrum $O \in a$. Der Ähnlichkeitsfaktor ist eine vom Drehwinkel σ abhängige Funktion. Ist die Funktion exponentiell, handelt es sich um eine (gewöhnliche) Spiraltung. Tritt σ linear auf, spricht man von einer Helispiraltung.

Überblick und Vergleich

	Spiralung	Helispiralung
Ähnlichkeitsfaktor in Abhängigkeit von σ	$e^{p\sigma}$	$p\sigma$
ebene Bahnkurve	logarithmische Spirale	archimedische Spirale
Bahnkurve eines Punktes im Raum	zylindro-konische Spirale	Helispirale
Raumkurve erzeugbar als Schnitt eines Drehkegels mit einem lotrechten Zylinder, dessen Basiskurve ist:	logarithmische Spirale 	archimedische Spirale 

2.1 Spiraltung

Definition

Eine *Spiralung* ist eine Zusammensetzung einer Rotation um eine Achse a mit Drehwinkel σ und einer zentrischen Streckung von $O \in a$ aus mit dem Faktor $e^{p\sigma}$ (p ist der *Spiralparameter*).

Die Spiralisierung ist für die Geometrie von großer Bedeutung, da durch eine räumliche Spiralisierung zwei gleichsinnig ähnliche Raumfiguren stets ineinander übergeführt werden können. Sie ist eine winkeltreue Abbildung, eine Ähnlichkeit.

2.1.1 Ebene Spiralisierung

Definition

Unterwirft man nur Punkte der Normalebene zur Achse a durch den Punkt O einer Spiralisierung, so erhält man als Bildpunkte Punkte dieser Ebene. Diese eingeschränkte Abbildung nennt man *ebene Spiralisierung*.

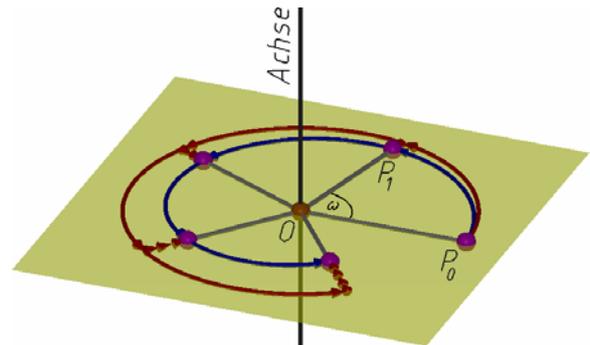


Abb.2.1: Ebene Spiralisierung

Diskret betrachtet, handelt es sich um eine Drehstreckung, die durch einen Drehwinkel ω und den dazugehörigen

Streckfaktor s festgelegt ist. Ist P_1 das Bild von P_0 unter der Drehstreckung, so ist ω der Winkel $\angle(P_0OP_1)$ und s das Verhältnis $OP_0:OP_1$.

Analytische Darstellung

Für die analytische Darstellung verwenden wir Polarkoordinaten r, φ bezüglich O und einer beliebigen Nullrichtung x . Der Punkt $P_0 = (r_0, \varphi_0)$ wird unter der Drehstreckung auf den Punkt $P_1 = (r_1, \varphi_1)$ abgebildet, wobei $r_1 = r_0 \cdot s$ und $\varphi_1 = \varphi_0 + \omega$ ist. Durch mehrmaliges Anwenden der Drehstreckung erhalten wir für P_n :

$$r_n = r_0 \cdot s^n, \quad \varphi_n = \varphi_0 + n\omega$$

Daraus lässt sich die Darstellung der Spiralisierung folgern. Wir eliminieren den Zählindex n durch den die einzelnen Lagen der Drehstreckung erzeugt werden. Setzen wir $n\omega = \sigma$, können wir φ und auch r als stetige Funktionen in Abhängigkeit von σ schreiben: $r = r_0 \cdot s^{\frac{\sigma}{\omega}}$, $\varphi = \varphi_0 + \sigma$

Zusätzlich möchten wir $s^{\frac{\sigma}{\omega}}$ durch eine e -Potenz ersetzen. Sei $s^{\frac{\sigma}{\omega}} = e^{p\sigma}$ mit p als Spiralsparameter, den wir berechnen:

$$s^{\frac{\sigma}{\omega}} = e^{p\sigma} \quad | \quad \ln$$

$$\frac{\sigma}{\omega} \ln s = p\sigma \quad | : \sigma$$

$$p = \frac{\ln s}{\omega}$$

Die Parameterdarstellung der Spiralisierung in Polarkoordinaten lautet also:

$$r = r_0 \cdot e^{p\sigma}, \quad \varphi = \varphi_0 + \sigma$$

Auch die kartesische Darstellung ist von Interesse. Die Drehung wird durch $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$ beschrieben, die Streckung fließt wieder durch $e^{p\sigma}$ ein:

$$x = e^{p\sigma}(x_0 \cos \sigma - y_0 \sin \sigma), \quad y = e^{p\sigma}(x_0 \sin \sigma + y_0 \cos \sigma)$$

2.1.2 Logarithmische Spirale

Die Bahnkurve eines Punktes bei einer ebenen Spiralisierung ist eine *logarithmische Spirale*.

$P_0 = (r_0, \varphi_0)$ sei der Ausgangspunkt, so folgt aus der Darstellung der ebenen Spiralisierung die Parameterdarstellung für die logarithmische Spirale:

$$r = c \cdot e^{p\varphi} \quad \text{mit} \quad c = r_0 \cdot e^{-p\varphi_0}$$

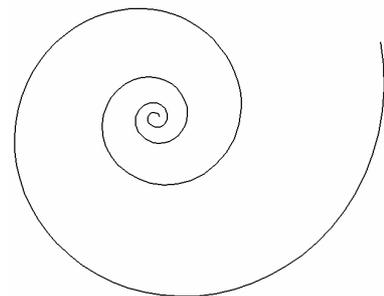


Abb.2.2: Logarithmische Spirale

Eigenschaften der logarithmischen Spirale

- Die logarithmische Spirale, aufgefasst als ebene Figur, geht unter der Spiralisierung durch die sie erzeugt wurde, in sich selbst über. Sie ist also unendlich oft zu sich selbst ähnlich.
- Für negative Werte von p schlingt sich die Kurve immer enger um das Zentrum, das daher auch asymptotischer Punkt heißt.
- Alle Strahlen durch das Zentrum O schneiden die logarithmische Spirale unter konstantem Winkel α (*Kurswinkel*). Das folgt aus der Winkeltreue von Ähnlichkeiten. Die Herleitung des Winkels zeigt einen direkten Zusammenhang zwischen α und dem Parameter p :

Wir verwenden für die Herleitung die logarithmische Spirale durch den Punkt $(1,0)$, da alle logarithmischen Spiralen durch Drehung oder Streckung ineinander übergeführt werden können.

Die logarithmische Spirale durch $(1,0)$ lässt sich beschreiben durch:

$$x = e^{p\sigma} \cos \sigma, \quad y = e^{p\sigma} \sin \sigma$$

Wir fassen die Gleichungen zu einem Vektor zusammen:

$$\vec{a} = e^{p\sigma} \begin{pmatrix} \cos \sigma \\ \sin \sigma \end{pmatrix}$$

Um eine Aussage über den Winkel zu treffen, berechnen wir den Ableitungsvektor:

$$\vec{b} = pe^{p\sigma} \begin{pmatrix} \cos \sigma \\ \sin \sigma \end{pmatrix} + e^{p\sigma} \begin{pmatrix} -\sin \sigma \\ \cos \sigma \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von \vec{a} und \vec{a}^\perp , dem Normalvektor von \vec{a} , vereinfachen wir \vec{b} : $\vec{b} = p\vec{a} + \vec{a}^\perp$ und können \vec{b} daher aus \vec{a} konstruieren.

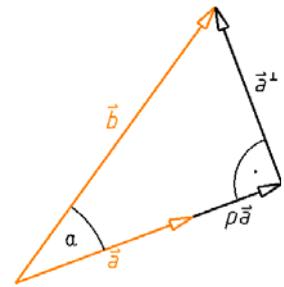


Abb.2.3

Wir verschieben die Vektoren \vec{a}, \vec{b} parallel in einen Punkt. Da \vec{a}^\perp durch eine Vierteldrehung aus \vec{a} entsteht, stellen $p\vec{a}$ und \vec{a}^\perp die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks dar. Es folgt die gesuchte Formel für α :

$$\cot \alpha = \frac{p\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = p, \text{ wobei } \|\vec{a}^\perp\| = \|\vec{a}\| \text{ gilt.}$$

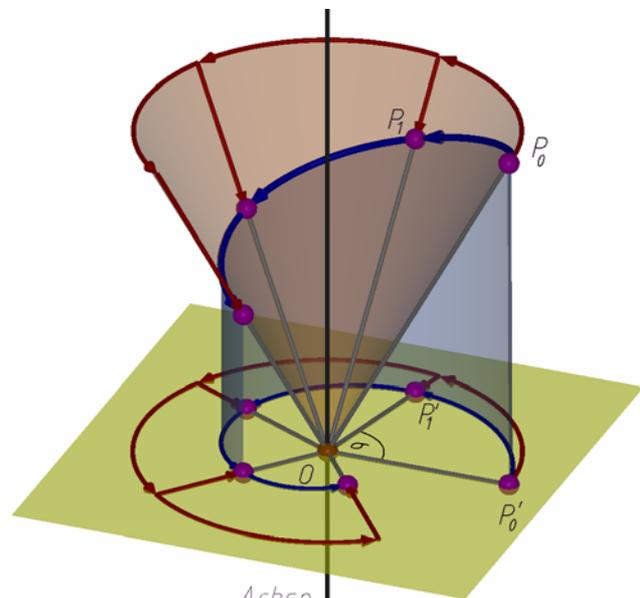
- Weil der Winkel α nur vom Spiralparameter p abhängt, so erkennt man: Alle Bahnspiralen einer ebenen Spirallung sind untereinander kongruent und können durch Drehung um das Zentrum O ineinander übergeführt werden. Auch mittels zentrischer Streckung kann eine Bahnspirale auf eine andere der gleichen Spirallung abgebildet werden.

2.1.3 Räumliche Spirallung

Analytische Darstellung

Legt man das Zentrum O in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und die Achse a auf die z -Achse, so lautet die Darstellung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{p\sigma} \begin{pmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma & 0 \\ \sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$



Achse
Abb.2.4: Räumliche Spirallung

$$x = e^{p\sigma}(x_0 \cos \sigma - y_0 \sin \sigma), \quad y = e^{p\sigma}(x_0 \sin \sigma + y_0 \cos \sigma), \quad z = e^{p\sigma} \cdot z_0$$

Damit lässt sich für einen beliebigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ für jeden Parameterwert σ die Neulage $P = (x, y, z)$ berechnen.

Spiralgebilde

Abhängig vom Objekt, das man einer räumlichen Spiralisierung unterwirft, erhält man verschiedene Spiralgebilde: Punkt durchläuft Bahnspirale, Kurve (Gerade) überstreicht Spiralfläche, Ebene hüllt Spiraltorse ein,...

Eigenschaften der räumlichen Spiralisierung

- Alle Spiralgebilde sind gegenüber der Spiralisierung invariant.
- Jedes Spiralgebilde ist unendlichfach zu sich selbst ähnlich.
- Die einfachsten und daher auch wichtigsten Elemente bzw. Gebilde, die bei der räumlichen Spiralisierung invariant bleiben, sind:
 - Zentrum O (Fixpunkt)
 - Achse a : Diese Fixgerade ist gleichzeitig die Bahn jedes eigentlichen, ihr angehörenden Punktes $P \neq O$. Ihr Fernpunkt ist ein Fixpunkt.
 - Die O enthaltende Grundebene $\pi \perp a$
 - Die Drehkegel mit Achse a und Spitze O
 - Die zu π normalen Spiralzylinder, die jeweils eine der in π verlaufenden, logarithmischen Bahnspiralen zur Basis haben. Ein solcher Fixzylinder wird durch die Spiralisierung einer zu a parallelen Geraden erzeugt.

Die aufgelisteten Elemente sind Invariant bezüglich der räumlichen Spiralisierung, weil sie sowohl bei der Drehung um a als auch bei der Streckung vom Spiralisierungszentrum O aus unverändert bleiben.

2.1.4 Zylindro-konische Spiralen

Bis jetzt wissen wir, dass die Punkte der Grundebene π unter einer Spiralisierung eine logarithmische Spirale durchlaufen und, dass die Punkte der Achse a entlang dieser laufen. Nun wollen wir eine allgemeine Bahnkurve der Spiralisierung behandeln (*Zylindro-konische Spirale*).

Analytische Darstellung

Diese folgt direkt aus der Darstellung der Bewegung. Unterwirft man den Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ einer Spiralisierung, so beschreibt er die Kurve:

$$x = e^{p\sigma} (x_0 \cos \sigma - y_0 \sin \sigma), \quad y = e^{p\sigma} (x_0 \sin \sigma + y_0 \cos \sigma), \quad z = e^{p\sigma} \cdot z_0$$

Konstruktion als Schnitt zweier Flächen

Sei P ein Punkt, der weder π noch a angehört und P' sein Normalriss auf die Grundebene π (Grundriss). Die Gerade PP' bleibt während der Spiralong parallel zur Achse und überstreicht einen Spiralzylinder Λ , der die logarithmische Bahnspirale l' von $P' \in \pi$ zur Basis hat. Da l' der Grundriss von l ist, liegt auch l auf dem Spiralzylinder.

Sei θ der Winkel, den die Gerade OP mit der Achse a bildet. Da dieser Winkel unverändert bleibt, überstreicht der Strahl OP bei der Spiralong einen Fixkegel Δ : Drehkegel mit Spitze O , Achse a und Öffnungswinkel 2θ .

Daraus ergibt sich, dass jede Bahnspirale einer räumlichen Spiralong als Schnittkurve der beiden Trägerflächen Λ und Δ entsteht. Zur Schnittkurve gehört aber auch noch die, zu l bezüglich π symmetrische, Bahnkurve \bar{l} , die keineswegs als Fortsetzung von l anzusehen ist.

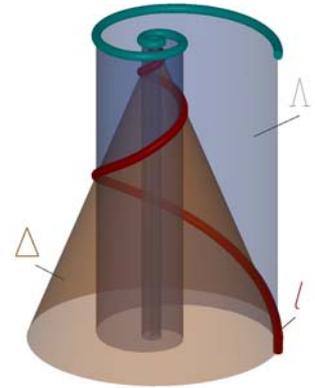


Abb.2.5 zylindro-konische Spirale als Schnittkurve konstruiert

Eigenschaften der zylindro-konischen Spiralen

- Wegen der Winkeltreue der Spiralong durchsetzt die zylindro-konische Spirale l alle Erzeugenden des Spiralzylinders Λ unter einem konstanten Winkel β .⁴ Bei der Verebnung von Λ geht l in eine Gerade l^v über.⁵
- Betrachtet man den Fixkegel Δ , so gilt erneut wegen der Winkeltreue, dass alle Erzeugenden von Δ die zylindro-konische Spirale unter konstantem Winkel γ schneiden.⁶ Bei der Verebnung von Δ geht l in eine logarithmische Spirale mit Kurswinkel γ über.
- Im Gegensatz zur Schraubung hat es keinen Sinn zwischen links- und rechtsgängiger Spiralong zu unterscheiden, da Bahnkurven auf verschiedenen Seiten der Fixebene π entgegengesetzt gewunden sind.
- Die Bahnspiralen nähern sich mit unzähligen, ständig kleiner werdenden Windungen dem Fixpunkt O . Aus Stetigkeitsgründen zählen wir daher O zur

⁴ Daher ist die zylindro-konische Spirale eine *Zylinderloxodrome* und bei der Aufstellung mit lotrechter Achse auch eine *Böschungslinie*. Siehe S. 10 Fußnote 1.

⁵ Besitzt eine Kurve diese Eigenschaft, nennt man sie *geodätische Linie*. Siehe S. 10 Fußnoten 3.

⁶ Eine Kurve, die die Erzeugenden eines Kegels unter konstantem Winkel schneidet, heißt (Dreh-)Kegelloxodrome.

Kurve. Die analytische Darstellung einer Bahnspirale führt bei $p > 0$ mit $\sigma \rightarrow -\infty$ auf $x = y = z = 0$. O ist allerdings ein singulärer Kurvenpunkt ohne Tangente.

- Bei der Schraublinie sind wir gewohnt von Gängen zu sprechen, die sich periodisch wiederholen. Wir betrachten die zylindro-konische Bahnspirale in 2π Intervallen des Drehwinkels („Gänge“) unterteilt. Die Teilkurven lassen sich durch eine zentrische Ähnlichkeit mit dem Zentrum O und dem Streckfaktor $\lambda = e^{2\pi p}$ ineinander überführen. Durch wiederholte Anwendung der zentrischen Ähnlichkeit lässt sich aus einem solchen Gang die ganze Bahnkurve gewinnen.
- Die auf demselben Drehkegel A verlaufenden Bahnspiralen sind untereinander kongruent und können durch Drehung um die Achse a ineinander übergeführt werden.

2.2 Helispiralung

In diesem Kapitel geht es um eine Abbildung, die bis jetzt noch wenig untersucht wurde. Wir bezeichnen sie als Helispiralung, weil sie sowohl Eigenschaften der Schraubung als auch der klassischen Spiralisierung hat.

Definition

Eine **Helispiralung** ist die Kombination einer Drehung um eine Achse a (Winkel σ) und einer proportionalen (nicht exponentiellen) zentrischen Ähnlichkeit aus einem festen Punkt $O \in a$ (Ähnlichkeitsfaktor $p\sigma$, wobei p der **Helispiralparameter** ist).

2.2.1 Ebene Helispiralung

Beschränkt man die Helispiralung auf die Normalebene zur Achse a durch den Punkt O , so erhält man eine **ebene Helispiralung**.

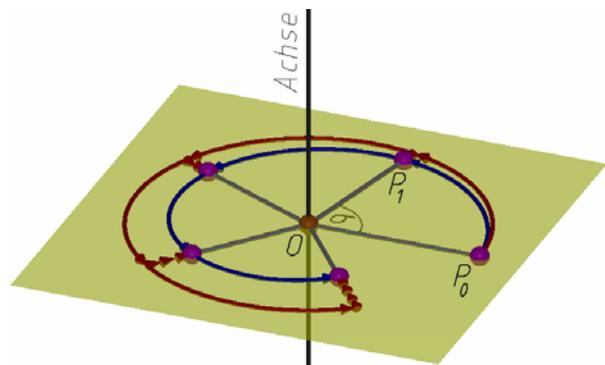


Abb.2.6: ebene Helispiralung

Analytische Darstellung

Für die analytische Darstellung der ebenen Helispiralung legen wir den Punkt O in den Ursprung. Wir unterwerfen $P_0 = (r_0, \varphi_0)$ einer ebenen Helispiralung. Auf den

Radius r_0 wirkt die zentrische Ähnlichkeit der Helispiralung ($r = p\sigma \cdot r_0$), während zum Winkel φ_0 der Drehwinkel σ dazukommt ($\varphi = \varphi_0 + \sigma$). Also lässt sich die ebene Helispiralung folgendermaßen schreiben: $r = p\sigma \cdot r_0$, $\varphi = \varphi_0 + \sigma$

2.2.2 Archimedische Spirale

Die Bahnkurve eines Punktes unter einer ebenen Helispiralung ist eine *archimedische Spirale*.

Die Bahnkurve von $P_0 = (r_0, \varphi_0)$ lässt sich in Abhängigkeit von $\varphi \in \mathbb{R}$ durch $r = pr_0 \cdot (\varphi - \varphi_0)$ beschreiben.

Eigenschaften der archimedischen Spiralen

- Nimmt φ den Wert φ_0 an, erhält man O . Das bedeutet, dass das Helispiralzentrum ein Punkt der archimedischen Spirale ist.
- Die Teilkurven zu den Parameterintervallen $[-\varphi, 0]$ und $[0, \varphi]$ sind symmetrisch bezüglich einer Geraden durch O .
- Eine weitere Eigenschaft leiten wir her: $P_1 = (r_1, \varphi_1)$ und $P_2 = (r_2, \varphi_2)$ seien zwei Punkte der archimedischen Spirale $r = pr_0 \cdot (\varphi - \varphi_0)$. Für P_1 und P_2 gilt, dass die Differenz $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$ ist und daher liegen P_1 und P_2 auf einem Strahl durch O . Wir setzen P_1 und P_2 in die Formel der archimedischen Spirale ein:

$$r_1 = pr_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) \text{ und } r_2 = pr_0 \cdot (\varphi_2 - \varphi_0) = pr_0 \cdot (\varphi_1 + 2\pi - \varphi_0)$$

Daraus berechnen wir den Abstand zwischen P_1 und P_2 : $r_2 - r_1 = 2\pi pr_0$. Daraus folgt: Der Abstand zwischen zwei Punkten der archimedischen Spirale, die auf einem Strahl durch O liegen mit $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$, ist $2\pi pr_0$, also unabhängig von der Wahl der Punkte.

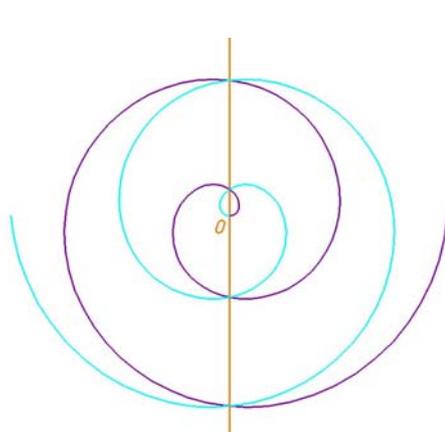


Abb.2.7: archimedische Spirale

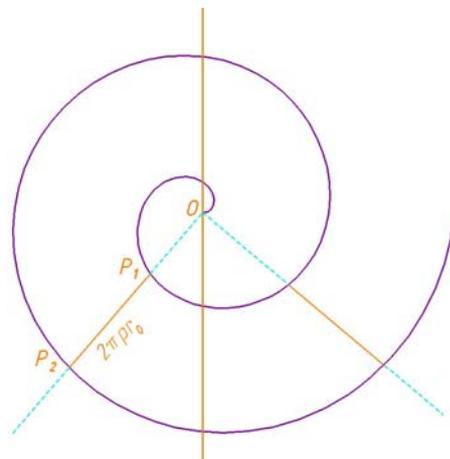


Abb.2.8: konstanter Abstand

2.2.3 Räumliche Helispiralung

Nicht länger beschränken wir die Abbildung auf eine Ebene, sondern betrachten sie im ganzen \mathbf{R}^3 .

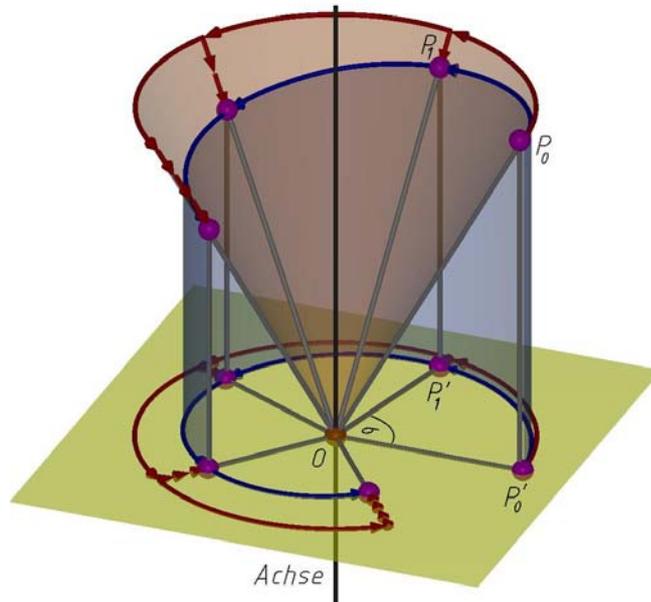


Abb.2.9: räumliche Helispiralung

Analytische Darstellung

Für die analytische Darstellung einer Helispiralung legen wir das Helispiralzentrum O in den Punkt $(0,0,0)$ und die Achse auf die z -Achse. Mit dem Helispiralparameter p und dem Drehwinkel σ ist die diskrete Helispiralung festgelegt. Wir suchen das Bild $P_1 = (r_1, \varphi_1, z_1)$ des Punkts $P_0 = (r_0, \varphi_0, z_0)$ unter der Helispiralung.

Projiziert man P_0 in Richtung der Achse auf die Normalebene der Achse durch O und unterwirft man diesen Punkt $(r_0, \varphi_0, 0)$ der Helispiralung, kennen wir bereits die Abbildungsgleichungen:

$$r_1 = p\sigma \cdot r_0, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \sigma, \quad z_1 = 0$$

Da die Projektion nur eine Auswirkung auf die z -Koordinate genommen hat, stimmen die Gleichungen für r und φ auch für Punkte des \mathbf{R}^3 . Die Abbildungsgleichung für die z -Koordinate ist noch offen. Die Drehung um die Spiralachse hat keine Auswirkungen auf die z -Koordinate, weil die Spiralachse die z -Achse ist. Die zentrische Streckung aus O bewirkt bei der z -Koordinate eine Multiplikation mit dem Faktor $p\sigma$: $z_1 = p\sigma \cdot z_0$

Ist $\sigma \in \mathbf{R}$, beschreiben die Gleichungen

$$r = p\sigma \cdot r_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \sigma, \quad z = p\sigma \cdot z_0$$

die stetige Helispiralung.

2.2.4 Helispirale

Definition

Die Bahnkurve eines Punktes bei einer Helispiralung nennt man *Helispirale*.

Analytische Darstellung

Lässt man den Winkel σ laufen, so beschreibt die obige Formel $r = p\sigma \cdot r_0$, $\varphi = \varphi_0 + \sigma$, $z = p\sigma \cdot z_0$ die Helispirale des Punktes $P_0 = (r_0, \varphi_0 + \frac{1}{p}, z_0)$. P_0 erhält man für $\sigma = \frac{1}{p}$. Wir drehen die Helispirale um die Achse der Helispiralung so, dass $\sigma = \frac{1}{p}$ $P_0 = (\bar{r}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{z}_0)$ liefert. Dazu führen wir einen Parameterwechsel durch:

$\bar{r} = r$, $\bar{z} = z$ und die Gleichung für $\bar{\varphi}$ berechnen wir aus $\varphi = \varphi_0 + \sigma$, indem wir $\varphi_0 = \bar{\varphi}_0 - \frac{1}{p}$ einsetzen. Die Gleichung für $\bar{\varphi}$ lautet also: $\bar{\varphi} = \varphi_0 - \frac{1}{p} + \sigma$.

Vernachlässigt man die Querstriche, lautet die Parameterdarstellung der Helispirale durch den Punkt $P_0 = (r_0, \varphi_0, z_0)$:

$$r = p\sigma \cdot r_0, \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{1}{p} + \sigma, \quad z = p\sigma \cdot z_0$$

Für $\sigma = \frac{1}{p}$ erhält man nun $P_0 = (r_0, \varphi_0, z_0)$ und setzt man für σ Null ein, erhält man das Helispiralzentrum O , das ein regulärer Punkt der Kurve ist.

In kartesischen Koordinaten lautet die Parameterdarstellung der Bahnhelispirale von $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$x = p\sigma (x_0 \cos \sigma - y_0 \sin \sigma), \quad y = p\sigma (x_0 \sin \sigma + y_0 \cos \sigma), \quad z = p\sigma \cdot z_0.$$

Für weitere Überlegungen wählen wir die x -Achse so, dass $y_0 = 0$ ist und schreiben statt $x_0, r_0 \Rightarrow P_0 = (r_0, 0, z_0)$.

Differenziert man die Gleichungen

$$x = p\sigma r_0 \cos \sigma, \quad y = p\sigma r_0 \sin \sigma, \quad z = p\sigma \cdot z_0 \text{ so erhält man:}$$

$$\dot{x} = p r_0 (\cos \sigma - \sigma \sin \sigma), \quad \dot{y} = p r_0 (\sin \sigma + \sigma \cos \sigma), \quad \dot{z} = p z_0$$

Die Länge des Tangentenvektors beträgt $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = p\sqrt{r_0^2(1 + \sigma^2) + z_0^2}$.

Eigenschaften der Helispirale

- Versteht man σ als Zeitparameter, so entspricht der Geschwindigkeitsvektor dem Tangentenvektor. Punkte auf der Spiralachse ($r_0 = 0$) wandern also mit konstanter Geschwindigkeit der Achse entlang.
- Die z -Koordinate des Geschwindigkeitsvektors ist von σ unabhängig und daher bewegt sich jeder Punkt in Richtung der z -Achse mit konstanter Geschwindigkeit. Betrachtet man die Bewegung eines Punktes P unter einer Helispiralung auf der Verbindungsgeraden von P und O , so wird aus dem Strahlensatz klar, dass P auch mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Strahl durch O wandert.
- Dass O ein Punkt der Helispirale (für $\sigma = 0$) ist, haben wir bereits festgestellt. Setzt man in die abgeleiteten Gleichungen $\sigma = 0$ ein, erhält man den Tangentenvektor im Punkt O . Der Tangentenvektor ist verschieden von Null und daher ist O ein regulärer Kurvenpunkt.

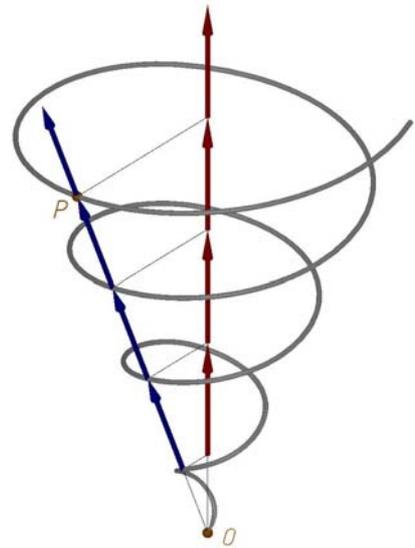


Abb.2.10: konstante Geschwindigkeit auf Strahlen durch O

Konstruktion einer Helispirale als Schnitt zweier Flächen

Analog wie bei der Spirale lässt sich auch die Helispirale als Schnitt eines Zylinders mit einem Drehkegel erzeugen. Der einzige Unterschied dabei ist, dass der lotrechte Zylinder als Basiskurve eine archimedische Spirale hat.

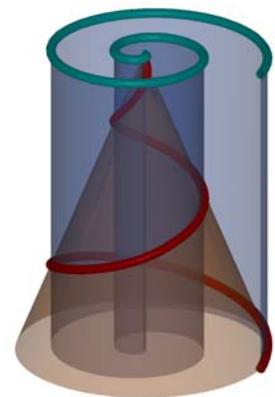


Abb. 2.11

2.3 Spiralfächen und Helispiralfächen

Definition

Wird eine Kurve e einer Spiralung bzw. Helispiralung unterworfen, so entsteht eine **Spiralfäche** bzw. **Helispiralfäche** Φ , vorausgesetzt dass e keine Bahnkurve ist.

e wird als Erzeugende von Φ bezeichnet. Φ enthält einerseits die Bahnen aller Punkte von e und andererseits alle untereinander ähnlichen Lagen von e . Die beiden Kurvenscharen überziehen die Fläche mit einem Netz.

Spiralflächen sind unendlichfach zu sich selbst ähnlich und gestatten die zentrische Streckung von O aus mit dem Streckfaktor $\lambda = e^{2\pi p}$, was der Grund für den periodischen Charakter ist.

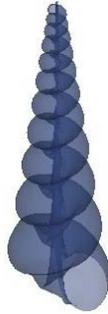


Abb.2.12: Spiralfläche



Abb.2.13. Helispiralfläche

Tangentialebene

Die Tangentialebene in einem Punkt P der Spiralfläche wird aufgespannt durch die Bahntangente in P und die Tangente an die durch P gehende Lage von e .

Querschnitte und Meridiane

Unter den verschiedenen Schnitten einer Spiral- bzw. Helispiralfläche sind für ihre Gestalt die Schnitte mit Ebenen durch die Achse a (*Meridianschnitte*) und normal zu a (*Querschnitte*) besonders kennzeichnend.

Alle Meridianschnitte einer Spiralfläche sind untereinander ähnlich, da sie durch Spirallung auseinander hervorgehen. Dies gilt ebenso auch für alle Querschnitte, soweit sie auf derselben Seite der Grundebene liegen. Zu verschiedenen Seiten der Grundebene liegende Querschnitte sind im Allgemeinen nicht zueinander ähnlich.

3 Kurven und Flächen im CAGD

Dieses Kapitel stellt den Übergang zwischen dem Wissen aus der Geometrie und den Anwendungen am Computer dar. Inhalt des Kapitels sind Methoden des Computer Aided Geometric Design (CAGD), die auch in CAD⁷-Paketen für die Darstellung von Kurven und Flächen herangezogen werden.

Die wenigsten Kurven und Flächen werden exakt gezeichnet, sondern werden durch geeignete Kurven bzw. Flächen angenähert. Bei Approximationen verwenden CAD-Programme meist Bezier-Kurven und -Flächen sowie B-Spline-Kurven und -Flächen, weil diese in ihrer analytischen Darstellung und Handhabung einfach sind.

3.1 Freiformkurven

Im CAGD wird zur Festlegung von Kurven eine diskrete Folge von Punkten b_i vorgegeben. Sei $x(u)$ eine Parametrisierung einer Kurve. Nun werden zwei Arten unterschieden:

1. *Interpolierende Kurven* enthalten diese Punktfolge. $b_i = x(u_i)$ heißen Stützpunkte mit den Trennstellen (Knoten) u_i .
2. *Approximierende Kurven* passen sich an diese Punktfolge gut an. b_i heißen Kontrollpunkte der Kurve.

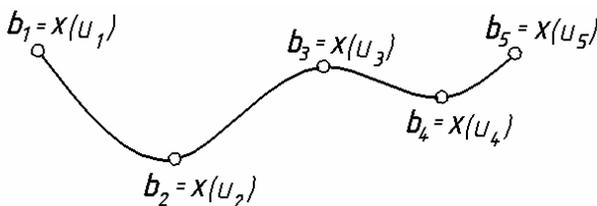


Abb.3.1: Interpolierende Kurve

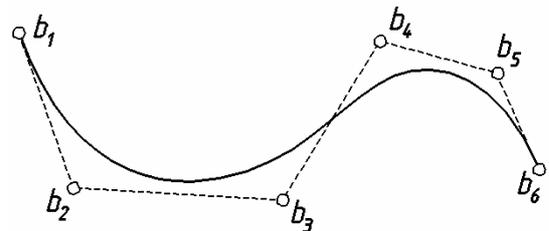


Abb.3.2: Approximierende Kurve

Damit die Kurve mit der Parametrisierung $x(u)$ einfach und effizient berechnet werden kann, werden wir $x(u)$ aus Segmenten aufbauen. Das hat auch den Vorteil, dass eine lokale Änderung der Kurve nicht unbedingt den Gesamtverlauf beeinflusst. Nach einer Wahl von Knoten $u_1 < u_2 < \dots < u_k$ wird jedes Segment $(x(u_i), x(u_{i+1}))$

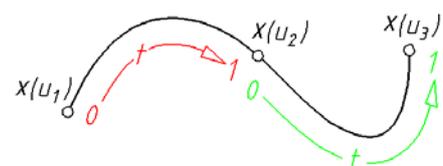


Abb.3.3: Parametrisierung mit lokalem Parameter

⁷ CAD: Computer Aided Design

mit Hilfe eines lokalen Parameters $t \in [0,1]$ dargestellt, wobei wir Polynomfunktionen verwenden:

$$\mathbf{x}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

Die Polynome vom Grad n bilden bekanntlich einen Vektorraum mit der Basis $\{1, t, \dots, t^n\}$. Die Koeffizienten a_0, \dots, a_n dieser Darstellung stehen in keinem einfachen Zusammenhang mit der Gestalt der Kurve, weswegen diese Form ungünstig ist. Daher suchen wir eine Basis, so dass die Koordinaten a_i der Polynomkurve bezüglich dieser Basis einen einfachen Zusammenhang mit der vorgegebenen Kurve bzw. mit den Kontrollpunkten haben.

3.1.1 Bezier-Kurve

Bernstein-Polynome

Geeignete Basispolynome sind zum Beispiel die sogenannten **Bernstein-Polynome**

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

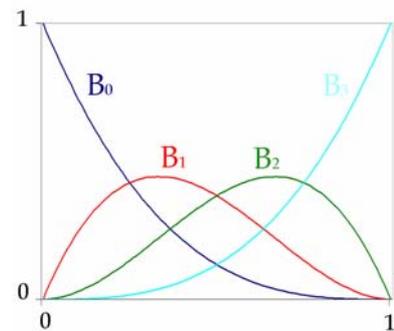


Abb.3.4: Darstellung der kubischen Bernstein-Polynome, List C., 2004, S 10

Eigenschaften der Bernstein-Polynome:

1. **Zerlegung der Eins:** $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1.$

Dies erkennt man durch die Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$1 = ((1-t) + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

2. $B_i^n(t) \geq 0$ für $t \in [0,1]$
3. **Rekursionsformel:** $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$

Die Bernstein-Polynome bilden nun die Basis mit der wir den Vektorraum aufspannen, in dem die Kurven beschrieben werden. Diese haben die Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n B_n^n(t), \quad t \in [0,1]$$

und heißen **Bezier-Kurven**.

Die Vektoren $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ sind die Ortsvektoren der sogenannten **Bezier-Punkte (Kontrollpunkte)**, die das **Bezier-Polygon (Kontrollpolygon)** bilden. Eine Bezier-Kurve n -ter Ordnung hat $n+1$ Bezier-Punkte.

Eigenschaften der Bezier-Kurven

1. Konvexe-Hülle-Eigenschaft

Die Bezier-Kurve liegt in der konvexen Hülle des Bezier-Polygons. Dies ergibt sich aus den Eigenschaften 1 und 2 der Bernstein-Polynome.

2. Algorithmus von de Casteljau

Mit Hilfe des Algorithmus von de Casteljau können unter der Kenntnis des Bezier-Polygons Punkte der Bezier-Kurve bestimmt werden. Aus der Rekursion der Bernstein-Polynome folgt folgende Konstruktion der Kurvenpunkte:

Sei $b_i^0 = b_i$. Dann berechnet man die Hilfspunkte folgendermaßen:

$$b_i^k(t) = (1-t)b_{i-1}^{k-1} + t b_i^{k-1}$$

Dies bedeutet eine Teilung der Strecke $\overline{b_{i-1}^{k-1} b_i^{k-1}}$ im Verhältnis $t : (1-t)$. Weiters ist leicht zu zeigen, dass $b_n^n(t) = x(t)$.

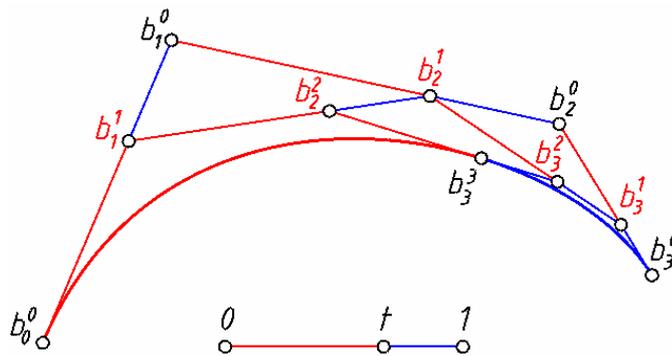


Abb.3.5

3. Unterteilungseigenschaft

Durch den Algorithmus von de Casteljau wird die Bezier-Kurve in zwei Teilbögen über den Intervallen $[0,t]$ und $[t,1]$ zerlegt. Jeder dieser Bögen ist eine Polynomkurve und besitzt daher selbst wieder eine Darstellung als Bezier-Kurve. Die Bezier-Punkte dieser beiden Kurven ergeben sich aus dem Algorithmus von de Casteljau:

Der Bogen über $[0,t]$ besitzt die Bezier-Punkte: $b_0^0, b_1^1, \dots, b_n^n$.

Der Bogen über $[t,1]$ besitzt die Bezier-Punkte: $b_n^n, b_{n-1}^{n-1}, \dots, b_0^0$.

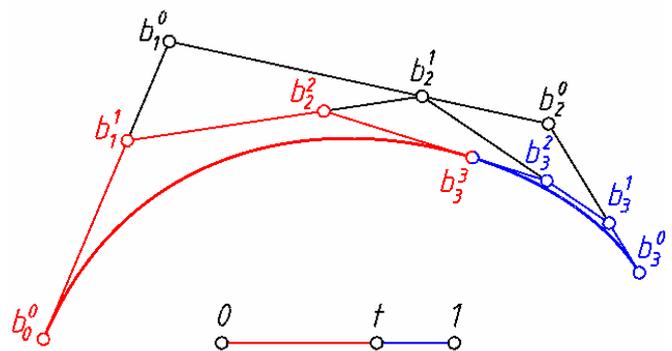


Abb.3.6: Unterteilung der Bezierkurve in zwei Teilkurven

Unterteilt man wieder beide Bögen nach de Casteljau, so erhält man insgesamt vier Bezier-Kurvenstücke und ein verfeinertes Bezier-Polygon. Fährt man mit diesen Unterteilungen fort, dann konvergieren die Polygone gegen die Kurve.

4. Variationsreduzierende Eigenschaft

Keine Gerade g hat mit einer ebenen Bezier-Kurve mehr Punkte gemein als mit dem zugehörigen Bezier-Polygon. Keine Ebene hat mit einer Bezier-Kurve im Raum mehr Schnittpunkte als mit dem räumlichen Bezier-Polygon dieser Kurve.

Tangenten

Mit Hilfe der ersten Ableitung berechnen wir die Tangenten an eine Bezier-Kurve. Dazu differenzieren wir eine allgemeine Darstellung einer Kurve, wobei wir die Bernstein-Polynome ausschreiben:

$$x(t) = \mathbf{b}_0(1-t)^n + \mathbf{b}_1 n(1-t)^{n-1}t + \mathbf{b}_2 \frac{n(n-1)}{2}(1-t)^{n-2}t^2 + \dots + \mathbf{b}_n t^n$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{b}_0 n(1-t)^{n-1}(-1) + \mathbf{b}_1 n(n-1)(1-t)^{n-2}(-1)t + \mathbf{b}_1 n(1-t)^{n-1} + \mathbf{b}_2 \frac{n(n-1)}{2}(n-2)(1-t)^{n-3}(-1)t^2 + \mathbf{b}_2 \frac{n(n-1)}{2}(1-t)^{n-2}2t + t^2(\dots) + \dots$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \mathbf{b}_0 n(n-1)(1-t)^{n-2} + \mathbf{b}_1 n(n-1)(n-2)(1-t)^{n-3}t + 2\mathbf{b}_1 n(n-1)(1-t)^{n-2}(-1) + \mathbf{b}_2 \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)(1-t)^{n-4}t^2 - \mathbf{b}_2 n(n-1)(n-2)(1-t)^{n-3}t + \mathbf{b}_2 n(n-1)(n-2)(1-t)^{n-3}t + \mathbf{b}_2 n(n-1)(1-t)^{n-2} + t(\dots) + \dots$$

Die Ableitung ausgewertet an der Stelle $t = 0$ bzw. $t = 1$ liefert:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=1} = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1})$$

Daraus folgt, dass die Tangente an die Bezier-Kurve im Punkt \mathbf{b}_0 die Verbindung von \mathbf{b}_0 und \mathbf{b}_1 bzw. im Punkt \mathbf{b}_n die Verbindung von \mathbf{b}_n und \mathbf{b}_{n-1} ist.

Aus der Unterteilungseigenschaft wissen wir, dass man eine Bezier-Kurve in beliebig viele Bezier-Kurven unterteilen kann. Somit lässt sich jeder Punkt einer Bezier-Kurve als Anfangspunkt einer Teilkurve auffassen, womit die Tangente aus dem Kontrollpolygon bestimmt ist. Analog ist jeder Punkt auch als Endpunkt einer Teilkurve darstellbar, was auch zur Tangente in diesem Punkt führt. Die beiden, so konstruierten Tangenten sind ident.

Schmiegebene

Die Schmiegebene an die Bezier-Kurve in \mathbf{b}_0 wird aufgespannt durch die Vektoren $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}\big|_{t=0}$.

$$\frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad \frac{d^2x}{dt^2}\big|_{t=0} = n(n-1)(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0)$$

Also ist die Schmiegebene jene Ebene, die durch $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ festgelegt ist. Analog ist die Schmiegebene in \mathbf{b}_n die Ebene $\mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n$.

Krümmung

Um die Krümmung zu berechnen, setzen wir in die bekannte Formel für die Krümmung $\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}\|}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^3}$ ein. $\dot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}}$ werden durch $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ festgelegt und somit die Krümmung auch.

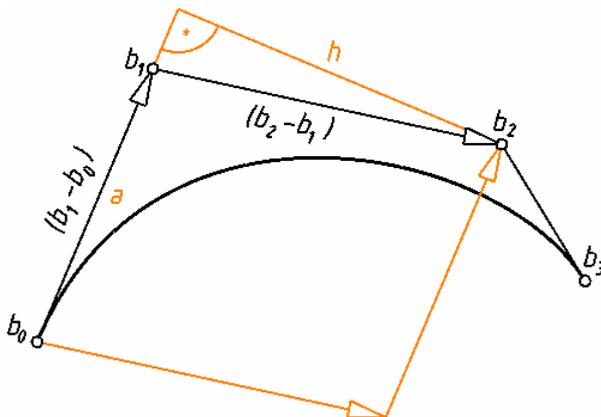


Abb.3.7: Berechnung des Flächeninhalts des Parallelogramms

$$\|\dot{\mathbf{x}}\| = n\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\| = na \text{ wobei } a := \overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}$$

$$\|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}\| = n^2(n-1)\|(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \times (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\| \Rightarrow$$

Die Norm $\|(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \times (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\|$ ist der Flächeninhalt des von $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$ und $(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)$ aufgespannten Parallelogramms. Wir ersetzen die Berechnung des Flächeninhalts durch die Formel „Grundlinie mal Höhe“. $a = \overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}$ und h ist der Abstand von \mathbf{b}_2 zur Tangente $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, so erhält man: $\|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}\| = n^2(n-1)ah$

Für die Krümmung gilt also: $\kappa\big|_{\mathbf{b}_0} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{h}{a^2}$

3.1.2 Rationale Bezier-Kurven

Rationale Bezier-Kurven in einer Ebene ε kann man sich folgendermaßen entstanden denken:

Legt man ε in die Ebene $z=1$ eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems und projiziert eine gewöhnliche Bezier-Kurve $\bar{\mathbf{b}}$

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{b}_i B_i^n(t)$$

mit den Kontrollpunkten \bar{b}_i im Raum aus dem Ursprung auf die eingebettete Ebene ϵ , so entsteht eine rationale Bezier-Kurve b . Sie ist festgelegt durch die Kontrollpunkte b_i und die Gewichte γ_i . Dabei sind b_i die Zentralrisse der Kontrollpunkte \bar{b}_i der Bezier-Kurve im Raum und γ_i sind die z-Koordinaten der \bar{b}_i . Die Kurve hat die Darstellung

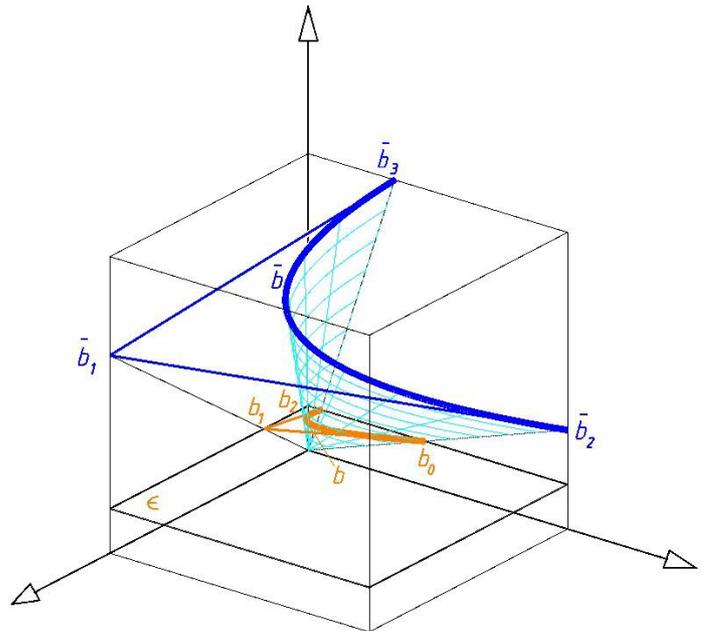


Abb.3.8: Rationale Bezier-Kurve

$$x(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \gamma_i b_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \gamma_i B_i^n(t)}$$

Jeder Kegelschnitt (eine rationale Bezier-Kurve 2. Ordnung) entsteht durch Projektion einer Parabel (gewöhnliche Bezier-Kurve 2. Ordnung).

3.1.3 Zusammengesetzte Bezier-Kurven

Bezier-Kurven sind ein gutes Werkzeug Kurven zu modellieren. Ist die Gestalt aber zu komplex, wird die Bezier-Darstellung von hoher Ordnung. Solche komplexe Kurven werden daher durch *zusammengesetzte Bezier-Kurven* modelliert. Stückweise polynomiale Kurven, unter die die zusammengesetzten Bezier-Kurven fallen, nennt man *Splines*.

Bei der Darstellung einer Bezier-Kurve läuft der Parameter t im Intervall $[0,1]$. Setzt man nun mehrere Bezier-Kurven zu einer Kurve zusammen, so benützt man einen globalen Parameter u und weist den Anfangs- bzw. Endpunkten der einzelnen Bezier-Kurven Parameter u_1, u_2, \dots zu. Im Segment $[u_i, u_{i+1}]$ hängt u mit dem lokalen Parameter t durch $u = u_i (1 - t) + u_{i+1} t$ zusammen.

Wir studieren nun Möglichkeiten der Zusammensetzung zweier Bezier-Kurven derselben Ordnung über den Intervallen $[u_{i-1}, u_i]$ und $[u_i, u_{i+1}]$ an der Stelle $u = u_i$. Dazu bezeichnen wir die Bezier-Punkte

zum Segment k_i über $[u_i, u_{i+1}]$ mit b_0, b_1, \dots, b_n und

zum Segment k_{i-1} über $[u_{i-1}, u_i]$ mit $b_{-n}, \dots, b_{-1}, b_0$.

Wir suchen nun Bedingungen, die einen glatten Übergang zwischen den beiden Kurven gewährleisten.

C¹-Übergang

Wir fordern in u_i C¹-Stetigkeit bezüglich des globalen Parameters u . Dafür bilden wir die Ableitung des Zusammenhangs zwischen dem globalen und lokalen Parameter.

$$u = u_i(1-t) + u_{i+1}t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -u_i + u_{i+1} = \Delta_i$$

Daraus erhalten wir für den Ableitungsvektor $\left. \frac{dx}{du} \right|_{u=u_i}$ der Kurve k_{i+1}

$$\left. \frac{dx}{du} \right|_{u=u_i} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{dt}{du} \right|_{u=u_i} = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i} \quad \text{mit} \quad \Delta_i := u_{i+1} - u_i$$

und analog für den Ableitungsvektor von k_{i-1}

$$\left. \frac{dx}{du} \right|_{u=u_i} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=1} \left. \frac{dt}{du} \right|_{u=u_i} = n(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1}) \frac{1}{\Delta_{i-1}} \quad \text{mit} \quad \Delta_{i-1} := u_i - u_{i-1}$$

$$C^1\text{-Übergang} \Leftrightarrow n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i} = n(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1}) \frac{1}{\Delta_{i-1}}$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen:

- Die Vektoren $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$ und $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1})$ unterscheiden sich in der Gleichung nur durch ein Vielfaches und sind daher parallel. Da \mathbf{b}_0 End- bzw. Startpunkt der Vektoren ist, liegen die Punkte \mathbf{b}_{-1} , \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 auf einer Geraden.
- Die beiden Vektoren $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$ und $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1})$ sind gleich orientiert, da die Faktoren $\frac{1}{\Delta_i}$ und $\frac{1}{\Delta_{i-1}}$ jeweils positiv sind. Daher sind die Vektoren $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1})$ und $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$ entgegengesetzt orientiert. \mathbf{b}_0 liegt also zwischen \mathbf{b}_{-1} und \mathbf{b}_1 bzw. \mathbf{b}_{-1} und \mathbf{b}_1 , liegen auf verschiedenen Seiten von \mathbf{b}_0 .
- Durch Umformen erhält man $\overline{\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_0} : \overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1} = \Delta_{i-1} : \Delta_i$.

Für einen GC¹-Übergang⁸ müssen nur die ersten beiden Bedingungen erfüllt sein.

C²-Übergang

Für die folgenden Überlegungen müssen wir notwendigerweise einen C¹-Übergang an der betrachteten Stelle \mathbf{b}_0 voraussetzen.

⁸ Einen tangentialstetigen Übergang nennt man GC¹-Übergang, d.h. es stimmen nur die Tangenten, aber nicht die Tangentenvektoren, überein.

Für den C^2 -Übergang müssen die 2. Ableitungsvektoren der Kurven k_i und k_{i-1} im Punkt \mathbf{b}_0 ident sein:

$$\text{für } k_i: \left. \frac{d^2 \mathbf{x}}{du^2} \right|_{u=u_i} = \left. \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 \Big|_{u=u_i} = n(n-1)(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i^2}$$

$$\text{für } k_{i-1}: \left. \frac{d^2 \mathbf{x}}{du^2} \right|_{u=u_i} = \left. \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt} \right|_{t=1} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 \Big|_{u=u_i} = n(n-1)(\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \frac{1}{\Delta_{i-1}^2}$$

$$C^2\text{-Übergang} \Leftrightarrow (\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i^2} = (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \frac{1}{\Delta_{i-1}^2}$$

Mit Hilfe der Vektoren \mathbf{b}_{-2} , \mathbf{b}_{-1} , \mathbf{b}_0 und \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 ist also eine Bedingung für einen C^2 -Übergang zweier Bezier-Kurven n -ter Ordnung formuliert. \mathbf{b}_{-2} , \mathbf{b}_{-1} , \mathbf{b}_0 bestimmen die Krümmung von k_{i-1} über $[u_{i-1} u_i]$ und \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 die Krümmung des Kurvensegments k_i über $[u_i u_{i+1}]$.

Um die Richtigkeit der Gleichung $(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i^2} = (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \frac{1}{\Delta_{i-1}^2}$ für zwei

Kurven einfacher zu überprüfen, verwenden wir zwei Hilfspunkte \mathbf{d}_- und \mathbf{d}_+ , deren Konstruktion durch die Unterteilungseigenschaft motiviert ist:

\mathbf{b}_0 teilt die Strecke $\overline{\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_1}$ im Verhältnis $\Delta_{i-1} : \Delta_i$. Wir konstruieren nun einen Punkt \mathbf{d}_- , sodass \mathbf{b}_{-1} die Strecke $\overline{\mathbf{b}_{-2}\mathbf{d}_-}$ im gleichen Verhältnis teilt ($\overline{\mathbf{b}_{-2}\mathbf{b}_{-1}} : \overline{\mathbf{b}_{-2}\mathbf{d}_-} = \Delta_{i-1} : \Delta_i$). Mit

Hilfe einer Wegbeschreibung schreiben wir \mathbf{d}_- an: $\mathbf{d}_- = \mathbf{b}_{-1} + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}(\mathbf{b}_{-1} - \mathbf{b}_{-2})$.

Analog konstruieren wir \mathbf{d}_+ aus den Punkten \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2 : $\mathbf{d}_+ = \mathbf{b}_1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$.

Die Bedingung für einen C^2 -Übergang mit Hilfe von \mathbf{d}_- und \mathbf{d}_+ lautet also: Es handelt sich um einen C^2 -Übergang, wenn $\mathbf{d}_- = \mathbf{d}_+$.

$$\mathbf{b}_{-1} + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}(\mathbf{b}_{-1} - \mathbf{b}_{-2}) = \mathbf{b}_1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$$

Um das zu zeigen, verwenden wir die Bedingung für einen C^1 -Übergang ($(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i} = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1}) \frac{1}{\Delta_{i-1}}$), den wir vorausgesetzt haben. Aus dieser Gleichung berechnen wir \mathbf{b}_{-1} und \mathbf{b}_1 :

$$\mathbf{b}_{-1} = \mathbf{b}_0 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1) \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1})$$

und ersetzen in der zu beweisenden Gleichung das allein stehende \mathbf{b}_{-1} bzw. \mathbf{b}_1 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_0 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1) + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}(\mathbf{b}_{-1} - \mathbf{b}_{-2}) &= \mathbf{b}_0 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{-1}) + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) \\
\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}(\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) &= \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}(\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \\
(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) \frac{1}{\Delta_i^2} &= (\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_{-2}) \frac{1}{\Delta_{i-1}^2}
\end{aligned}$$

Damit gewährleistet $d_- = d_+$ einen C^2 -Übergang in \mathbf{b}_0 .

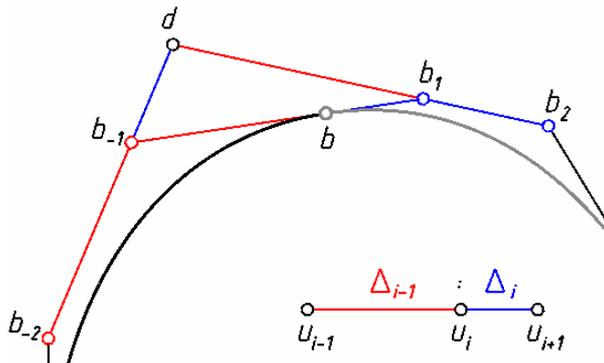


Abb.3.9: Übergang ist C^2 stetig, weil $d_- = d_+$

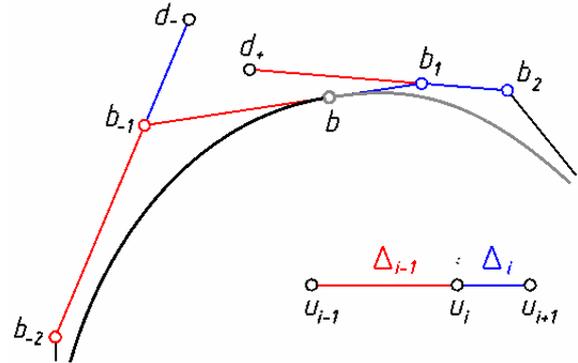


Abb.3.10: Übergang ist nicht C^2 stetig, weil $d_- \neq d_+$

3.1.4 Exakte Darstellung oder Approximation

Exakt dargestellt werden können nur:

- Kurven, deren Parameterfunktionen Polynome der Ordnung $\leq n$ sind. Sie werden durch Bezier-Kurven der Ordnung n dargestellt.
- Kurven, deren Parameterfunktionen Quotienten von Polynomen der Ordnung $\leq n$ sind. Sie werden durch rationale Bezier-Kurven der Ordnung n dargestellt.

In allen anderen Fällen können Kurven nur angenähert werden.

3.1.5 B-Spline-Kurven

In der CAD-Software werden Kurven oft durch Bezier-Kurven approximiert. Bei der Angabe von allgemeinen Kurven finden sie Verwendung. Aber auch rationale Kurven und komplexe Ketten von Kurven müssen oft durch B-Spline-Kurven angenähert werden, um weitere Konstruktionsschritte mit der Approximation der Kurve zu ermöglichen.

Eine zusammengesetzte Bezier-Kurve, deren Übergänge C^2 stetig sind, ist eine B-Spline-Kurve. Die Kontrollpunkte einer B-Spline-Kurve heißen deBoor-Punkte, mit deren Hilfe die B-Spline-Kurve dargestellt wird.

deBoor-Punkte

Wir setzen $r + 1$ Bezier-Kurven zu einer B-Spline-Kurve zusammen. Die C^2 -Stetigkeit der r Übergänge wird – wie im Kapitel 3.1.3 beschrieben – durch je ein d_r gesichert. d_r sind die deBoor-Punkte, die zur Darstellung der B-Spline-Kurve verwendet werden. Zusätzlich benötigen wir deBoor-Punkte für den Anfang und das Ende der B-Spline-Kurve. Im Anfangs- und Endbereich einer B-Spline-Kurve stimmen die deBoor-Punkte bis zu einem bestimmten Index mit den Kontrollpunkten der Bezier-Kurve überein.

Bei der Zusammensetzung von Bezier-Kurven n -ter Ordnung, erhält man die deBoor-Punkte folgendermaßen:

$d_{-(n-2)} \dots d_0$ stimmen mit den Bezier-Punkten b_0 bis b_{n-2} überein

$d_1 \dots d_r$ werden aus den r C^2 -Übergängen konstruiert

$d_{r+1} \dots d_{r+n-1}$ stimmen mit den letzten $n-1$ Bezier-Kurven überein

Anhand eines Beispiels soll der Zusammenhang zwischen den deBoor-Punkten und den Bezier-Punkten deutlich gemacht werden.

Die Abbildung 3.11 zeigt eine kubische B-Spline-Kurve, die aus zusammengesetzten Bezier-Kurven besteht. Es handelt sich dabei um eine uniforme B-Spline-Kurve, das ist eine B-Spline-Kurve, bei der alle Intervalllängen $\Delta_i = 1$ gewählt werden.

Jede der drei kubischen Bezier-Kurven hat ein Kontrollpolygon aus dem das Polygon für die B-Spline-Kurve entsteht.

Für die deBoor-Punkte gilt:

$$d_{-1} = b_0$$

$$d_0 = b_1$$

d_1, d_2 sind wegen dem C^2 -Übergang eindeutig bestimmt

$$d_3 = b_8$$

$$d_4 = b_9$$

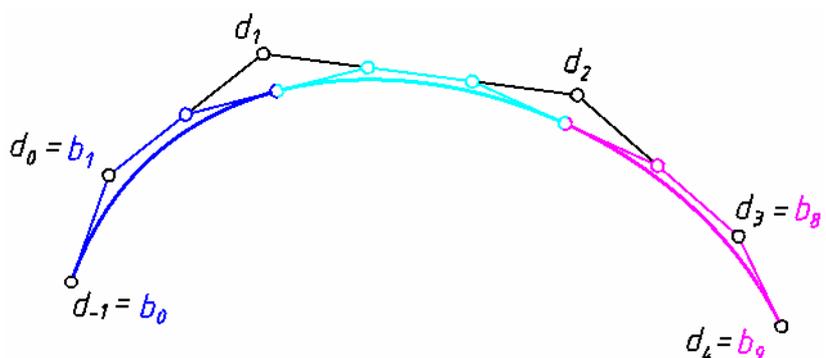


Abb.3.11: B-Spline-Kurve mit deBoor-Punkten

Darstellung der B-Spline-Kurve

Mit den deBoor-Punkten d_i kann eine B-Spline-Kurve durch

$$q(u) = \sum_{i=0}^m N_i^n(u) d_i$$

beschrieben werden (vgl. Farin, 1990, S.160).

Die $N_i^n(u)$ werden aus dem Knotenvektor $T(t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+n+1})$ berechnet, wobei $t_0 = \dots = t_n, t_{m+1} = \dots = t_{m+n+1}$ ist.

$$N_i^0(u) := \begin{cases} 1, & t_i \leq u < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_i^r(u) := \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u), \quad 1 \leq r \leq n$$

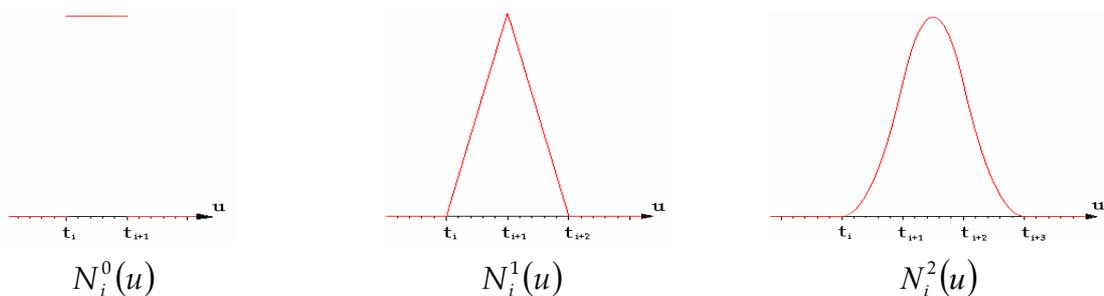


Abb.3.12: List C., 2004, S.20

Die Einschränkung von $N_i^n(u)$ auf das nichtleere Intervall (t_j, t_{j+1}) ist ein Polynom $N_{i,j}^n(u)$ vom Grad n .

3.1.6 Beispiele von Kurven

Für die Bearbeitung von Schraub-, Spiral- und Helispiralflächen ist die Darstellung von Schraublinien, zylindro-konischen Spiralen und Helispiralen interessant, sowie von beliebigen Kurven, die als Profilkurven verwendet werden.

Schraublinien, zylindro-konische Spiralen und Helispiralen können durch B-Spline-Kurven nur angenähert werden. Die Qualität der Annäherung wird durch eine Toleranz gesteuert, die den Abstand zwischen der eigentlichen Kurve und der vom CAD-Paket berechneten Kurve bestimmt. Umso größer die Toleranz gewählt wird, desto größer ist der Unterschied und desto kleiner ist auch die Anzahl der Kontrollpunkte (vgl. Kapitel 4.1, Beispiel: Klangstäbe).

Verwendet man als Profilkurve eine Gerade, Parabel oder B-Spline-Kurve, so ist das gezeichnete Bild exakt und keine Annäherung. Die Kegelschnitte Ellipse und Hyperbel können durch eine rationale B-Spline-Kurve exakt dargestellt werden. Schraub- und Spirallinien werden jedoch approximiert und können weder durch B-Spline-Kurven noch durch rationale B-Spline-Kurven exakt dargestellt werden.

3.2 Freiformflächen

Wie bei den Freiformkurven werden auch die Flächen durch Kontrollpunkte bestimmt. Mit Hilfe einer Freiformfläche werden verschiedene Aufgabenstellungen von CAD-Paketen bewältigt:

- Durch die *Angabe aller Kontrollpunkte* wird die Freiformfläche berechnet. Eine HP-Fläche kann dadurch exakt dargestellt werden.
- Durch *gegebene Punkte* soll eine *Interpolationsfläche* gelegt werden.
- Eine *gegebene Fläche* soll *approximiert* werden.

3.2.1 Bezier-Flächen

Definition

Als einfachster Fall werden zuerst die Tensorproduktflächen betrachtet. Sie werden analytisch durch folgende Parameterdarstellung (mit den Parametern u, v) beschrieben:

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \mathbf{b}_{ik} B_k^m(v) B_i^n(u), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

Dabei sind \mathbf{b}_{ik} die Ortsvektoren der Kontrollpunkte (Bezier-Punkte), die ein Kontrollnetz (Bezier-Netz) bilden.

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

sind die Bernstein-Polynome zum Grad n .

Die u -Linien ($v=v_0=const$) sind Bezier-Kurven mit der Ordnung n mit der Darstellung

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{k=0}^m \mathbf{b}_{ik} B_k^m(v) \right] B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i(v_0) B_i^n(u).$$

$\mathbf{b}_i(v_0)$ sind die Kontrollpunkte dieser u -Linie.

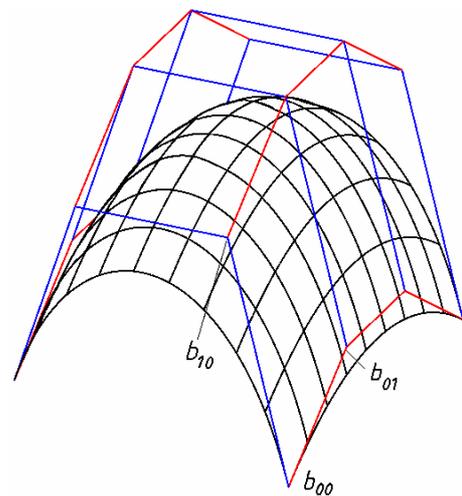


Abb.3.13: Bezier-Fläche

Insbesondere sind die Randkurven $v=0$, $v=1$ Bezier-Kurven mit den entsprechenden Randpolygone des Bezier-Netzes als Bezier-Polygon.

Analog gilt:

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{k=0}^m \mathbf{b}_{ik} B_i^n(u) \right] B_k^m(v) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i(u_0) B_i^n(v).$$

Die v -Linien ($u=u_0=const$) sind daher Bezier-Kurven der Ordnung m mit den Kontrollpunkten $\mathbf{b}_k(u_0)$. Die Randkurven $u=0$ und $u=1$ sind wiederum Bezier-Kurven, deren Bezier-Polygone die Randpolygone des Bezier-Netzes sind.

Fasst man die von den Randpolygone unterschiedlichen Reihen und Spalten des Kontrollnetzes als Kontrollpunkte von Bezier-Kurven auf, so entstehen Bezier-Kurven r bzw. s , die nicht auf der Tensorproduktfläche liegen.

Die Bezier-Fläche kann nun erzeugt werden, indem eine ihrer Bezier-Kurven (z.B. u -Linie) so bewegt wird, dass ihre Kontrollpunkte auf den oben erwähnten Kurven r , s wandern.

Algorithmus von de Casteljau

Durch den Algorithmus von de Casteljau ist es, wie auch schon bei den Bezier-Kurven, möglich, aus dem Kontrollpolygon allgemeine Flächenpunkte zu konstruieren.

Die Bezier-Punkte (Kontrollpunkte) einer v -Linie können durch Anwendung des Algorithmus von de Casteljau aus verschiedenen u -Linien (zu festem Teilverhältniswert) erzeugt werden. Nun kann man wiederum mit Hilfe des de Casteljau Algorithmus aus den Kontrollpunkten der v -Linie die Kurvenpunkte dieser v -Linie und damit Punkte der Fläche bestimmen.

Umgekehrt können auch zuerst die Kontrollpunkte einer u -Linie und dann die Punkte auf ihr bestimmt werden.

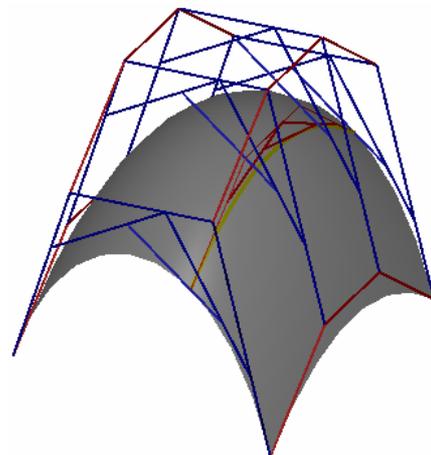


Abb.3.14: Algorithmus von de Casteljau

Eigenschaften von Bezier-Flächen

1. Randkurven

Die Randkurven der Bezier-Fläche sind die durch erste und letzte Reihe bzw. Spalte des Kontrollnetzes bestimmten Bezier-Kurven.

2. Tangentialebene

Die Tangentialebene in einer Ecke des Kontrollnetzes wird durch die Ecke und die benachbarten Kontrollpunkte aufgespannt. Das heißt, dass z.B. die Tangentialebene in \mathbf{b}_{00} von \mathbf{b}_{00} , \mathbf{b}_{01} , und \mathbf{b}_{10} aufgespannt wird.

3. Konvexe Hülle Eigenschaft

Jeder Punkt der Fläche liegt in der konvexen Hülle der Bezier-Punkte. Das ist aus folgender Rechnung ersichtlich:

Für die Bernstein-Polynome gilt die „Zerlegung der Eins“, also: $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$

(vgl. Bezier-Kurven, Kapitel 3.1.1)

Damit gilt für eine Bezier-Fläche:

$$\sum_{i=0}^n \left[\sum_{k=0}^n B_k^m(v) \right] B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$$
$$B_i^n(u) B_k^m(v) \geq 0 \text{ für } (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

Die Flächenpunkte entstehen also durch Linearkombination der Bezier-Punkte, wobei die Koeffizienten alle größer oder gleich 0 sind und die Koeffizientensumme 1 ist. Somit liegt die Fläche in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte.

4. Keine variationsreduzierende Eigenschaft

Die variationsreduzierende Eigenschaft, die für Bezier-Kurven gilt, haben Bezier-Flächen nicht.

3.2.2 Rationale Flächen

In analoger Weise, wie aus den Bezier-Kurven rationale Kurven entstehen, entstehen rationale Bezier-Flächen aus Bezier-Flächen.

3.2.3 Exakte Darstellung oder Approximation

Exakt dargestellt werden können nur:

- Flächen, deren Parameterfunktionen Polynome der Ordnung $\leq n$ sind. Sie werden durch Bezier-Flächen der Ordnung n dargestellt.
- Flächen, deren Parameterfunktion Quotienten von Polynomen der Ordnung $\leq n$ sind. Sie werden durch rationale Bezier-Flächen der Ordnung n dargestellt.

In allen anderen Fällen können Flächen nur angenähert werden. Schraub-, Spiral- und Helispiralflächen können durch Bezier-Kurven nur angenähert werden.

3.2.4 B-Spline-Flächen

Analog zu den Bezier-Flächen entsteht eine B-Spline-Fläche aus zwei Scharen von B-Spline-Kurven bzw. einem Kontrollpunktnetz und besitzt eine Darstellung der Bauart.

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m d_{ik} N_k^m(v) N_i^n(u).$$

3.2.5 Schraub-, Spiral- und Helispiralflächen

Schraub-, Spiral- und Helispiralflächen werden in CAD-Paketen durch Bezier- bzw. B-Spline-Flächen approximiert.

Wir bezeichnen im folgenden Schraublinien, zylindro-konische Spiralen und Helispiralen als v -Linien, die Profilkurven als u -Linien.

Aus dem Kapitel über B-Spline-Kurven ist bereits bekannt, dass Schraublinien, zylindro-konische Spiralen und Helispiralen nicht exakt dargestellt werden können.

Ob die u -Linien exakt oder approximiert dargestellt werden, hängt von der Profilkurve ab. (vgl. Kapitel 3.1.4 und folgende)

Ausführlich werden die Ergebnisse verschiedener Erzeugungsweisen von Schraub-, Spiral- und Helispiralflächen im Kapitel fünf diskutiert.

4 Beispiele für Schraubflächen

4.1 Allgemeine Schraubfläche

In diesem Kapitel werden das Erstellen einer Schraublinie (4.1.1) und einer Schraubfläche (4.1.2) beschrieben. Das Beispiel in 4.1.1 dient als Einführung für Schraublinien, die bei der Konstruktion jeder Schraubfläche benötigt werden. So wird in beiden Unterkapiteln das Zeichnen einer Schraublinie beschrieben, allerdings im ersten werden dabei so viele Angabeelemente wie möglich in den Funktionskasten mit der Tastatur eingegeben und im zweiten hingegen interaktiv festgelegt. Meistens verwendet man eine Mischform der beiden Wege.

4.1.1 Schraublinie

In vielen CAD-Paketen, so auch in MicroStation, werden Schraubungen immer durch die Schraublinie eines beliebigen Punktes unter der gegebenen Schraubung erfasst und so befassen wir uns als Erstes mit einem Beispiel zu einer Schraublinie.

Beispiel: Klangstäbe

Die am Bild gezeigten Klangstäbe sind verschieden lange Rohre, die an einem Ring befestigt sind. Wir stellen die Rohre als Drehzylinder dar, wobei die Drehachse gleich lang wie das jeweilige Rohr gezeichnet wird. Die oberen Enden der Zylinder haben alle den selben Abstand zum Ring. Daher liegen die oberen Enden der Drehachsen auf einem Kreis. Beginnt man beim längsten Rohr, so nimmt die Länge der Rohre beim Durchlaufen des Kreises konstant ab. Die unteren Enden der Drehachsen liegen also auf einer Schraublinie.



Abb.4.1:
Klangstäbe

Vorbereitung für die Konstruktion der Schraublinie

Wir beginnen mit dem Ring und stellen ihn als Kreis dar. Den Mittelpunkt legen wir in den Punkt $O=(0/0/0)$ und den Radius nehmen wir als 4 cm an. 6 cm darunter zeichnen wir für die Konstruktion der Röhren einen Kreis k mit dem gleichen Radius. Im Punkt $I=(0/-4/-6)$ hängen wir die Achse des längsten Rohres (16 cm) an. Setzen wir voraus, dass alle Schnüre gleich lang sind, so folgt auf Grund der Schwerkraft, dass die Achse lotrecht ist. ($\Rightarrow J=(0/-4/-22)$). Unter dieser Voraussetzung sind auch alle anderen Zylinderachsen und auch die Schraubachse a senkrecht.

Die gesuchte Schraublinie ist die Bahn des untersten Punktes J der gezeichneten Achse unter einer Schraubung. Die Schraubachse a muss O enthalten, weil O Mittelpunkt eines Kreises ist, der auch am Schraubzylinder der gesuchten Schraublinie liegt. Da a lotrecht ist und durch O geht, liegen alle Punkte deren x - und y -Koordinaten gleich Null ist auf a . Um die Konstruktion zu vereinfachen, wählen wir als Endpunkt von a den Punkt $(0/0/-22)$, weil dieser in derselben Normalebene von a wie J liegt.

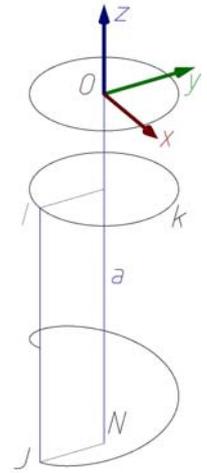


Abb.4.2.

Die Längendifferenz des längsten und kürzesten Rohres beträgt 6 cm. Läuft man den Kreis k im Uhrzeigersinn entlang, so ist der Winkel zwischen dem längsten und dem kürzesten Rohr $2\pi \cdot \frac{5}{6} = \frac{5\pi}{3}$. Daraus lassen sich der Parameter und die Ganghöhe berechnen:

$$p = \frac{l}{\lambda} = \frac{6}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{18}{5\pi} \Rightarrow h = 2p\pi = 2\pi \frac{18}{5\pi} = \frac{36}{5} = 7,2 \text{ cm}$$

Aus dem Foto erkennt man, dass es sich um eine Linksschraubung handelt. Für das Beispiel würden wir nur $5/6$ eines Ganges benötigen, wir zeichnen aber einfachheitshalber einen ganzen Gang.

Schraublinie als B-Spline-Kurve

Schraublinien werden - wie viele andere Kurven auch - in CAD-Software-Paketen durch B-Spline-Kurven angenähert. Es handelt sich daher bei der erzeugten Kurve um eine Näherung der Kurve, allerdings kann der Benutzer wählen, wie gut diese sein soll, indem er eine Toleranz für die Abweichung angibt. Je kleiner die Toleranz gewählt wird, desto besser ist die Annäherung durch die B-Spline-Kurve und desto mehr Kontrollpunkte werden verwendet.

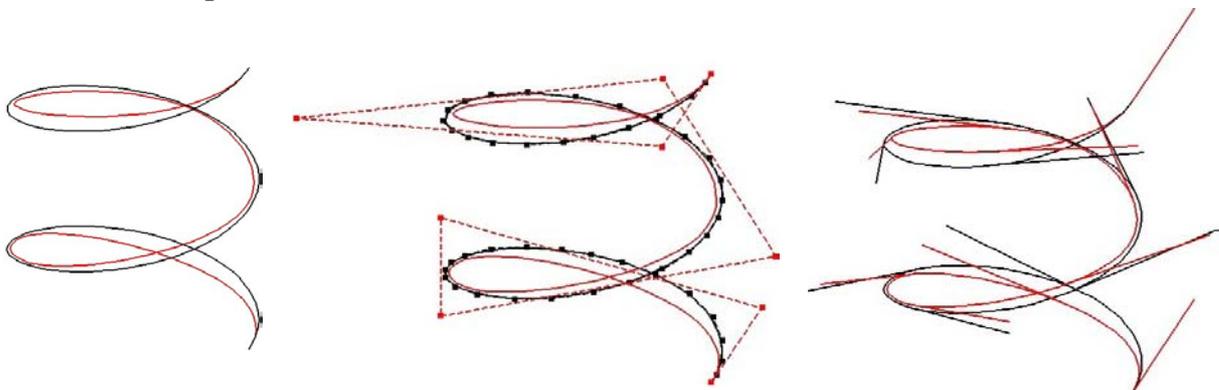


Abb.4.3.

In den Bildern sieht man zwei B-Spline-Kurven, die beide eine Schraublinie mit den selben Angabeelementen annähern. Für die schwarze Kurve wurde eine Toleranz von 0,001 gewählt und für die rote dagegen ein hoher Wert von 2. Betrachtet man

Grund- und Aufriss der Kurven, wird die Abweichung der roten Kurve zu einer echten Schraublinie sehr deutlich: Ihr Grundriss ist kein Kreis.

Eine wichtige Eigenschaft der Schraublinie ist, dass die Steigung konstant ist. Betrachtet man die Tangentenvektoren der gezeichneten Schraublinien⁹, so müssten sie alle gleich lang sein. Die Längen der Tangentenvektoren an die schwarze Kurve, die im Maßstab 1:10 gezeichnet sind, liegen alle zwischen 5,1244 und 5,1251, was innerhalb der vorgegebenen Toleranz liegt. Die roten Tangenten haben Längen zwischen 3,8892 und 5,1251 bei einem Maßstab von 1:10.



Abb.4.4.

Konstruieren der Schraublinie



In der Toolbox „B-Spline-Kurven“ gibt es die Funktion „Helix platzieren“ (1a ). Wir beginnen mit dem Einstellen der obersten beiden Felder:

Gewinde: Hier stellt man ein, ob man eine Rechts- oder Linksschraubung möchte.

Achse: Da die Einstellung „Punkte“ gegenüber den anderen Möglichkeiten keinen Nachteil hat, verwende ich diese.

Um die Einstellung **Orthogonal** zu verstehen, müssen wir Schraubung allgemeiner verstehen: Ein Punkt rotiert in einer Ebene um einen Punkt. Während der Rotation in der Ebene, wird die Ebene in eine beliebige Richtung (nicht parallel zur Ebene) parallel verschoben. Soll die Ebene, in der der Punkt wandert, normal auf die Ebene verschoben werden, muss das Kästchen für Orthogonal angeklickt sein.

Die noch offenen Größen sind uns alle bekannt und wir können durch Ausfüllen des Funktionskastens die Schraublinie festlegen. Allerdings bestimmt MicroStation beim Ausfüllen aller Felder den Anfangspunkt und er kann nicht von uns beliebig gewählt werden. Daher lassen wir das Feld für den **Radius unten** aus.

Radius Oben und Radius Unten: Da die Funktion „Helix platzieren“ auch für das Zeichnen von Helispiralen geeignet ist, muss man den Radius oben und unten mit demselben Zahlenwert festlegen. Wir erfassen den Radius unten durch Anklicken des Mittelpunkts und Anfangspunkts (siehe weiter unten) und den Radius oben legen wir mit der gleichen Länge fest (4 cm).

⁹ Tangentenvektoren einer Kurve kann man in MicroStation mit der Funktion „Kurve auswerten“ (B-Spline-Kurven, 1b ) berechnen lassen.

Steigung: MicroStation bezeichnet die Ganghöhe als Steigung (bzw. Steigungshöhe). In unserem Beispiel beträgt die Ganghöhe 7,2 cm.

Höhe: Da eine Schraublinie eine periodische Kurve ist, die unendlich lang ist, muss man angeben, wie hoch der Ausschnitt sein soll, den man zeichnen will. Es ist meistens einfach sich zu überlegen, wie viele Gänge man ganz oder teilweise ausgeführt haben will. Die Höhe berechnet man aus: Anzahl der Gänge \times Ganghöhe = Höhe. Da wir nur einen Gang zeichnen, beträgt die Höhe ebenfalls 7,2 cm.

Toleranz: Mit der Toleranz legt man fest, wie genau die Schraublinie durch eine B-Spline-Kurve angenähert werden soll. Wir wählen den Standardwert 0,001 und erhalten damit eine sehr gute Näherung der Schraublinie.

Nun zeichnen wir die gewünschte Schraublinie. MicroStation fragt uns als Erstes nach einem **Mittelpunkt**. Damit ist der Schnittpunkt der Achse mit der Normalebene auf die Achse durch den Anfangspunkt der Schraublinie gemeint (hier (0/0/-22)). Als Nächstes wird der **Anfangspunkt** benötigt. Das ist der Punkt der verschraubt wird bzw. der Anfangspunkt der Schraublinie (hier (0/-4/-22)). Abschließend muss die Achse, die durch den Mittelpunkt geht, noch durch einen weiteren Punkt fixiert werden.

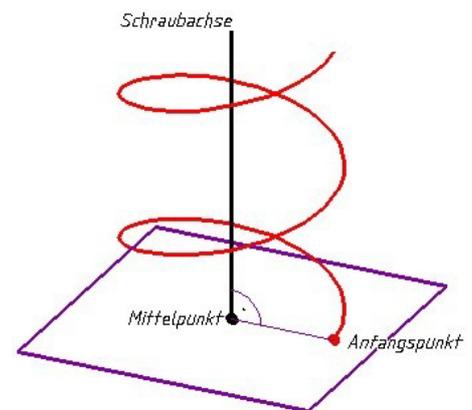


Abb.4.5.

Rohre als Drehzylinder

Da wir die Achse des längsten Rohres mit der Länge des Drehzylinders gezeichnet haben, müssen wir nur noch den Radius (0,8 cm) eingeben und snappen I und J um den Drehzylinder zu zeichnen. Der Radius aller Rohre ist gleich, womit wir uns nur noch mit den Längen der anderen Rohre befassen müssen.

Am Ring sind die sechs Röhren in regelmäßigen Abständen (60°) platziert. Die Enden der Drehachsen liegen auf dem Kreis k ebenfalls gleichmäßig verteilt. Daher stellen wir die Fangfunktion so ein, dass wir die Teilungspunkte für sechs gleiche Teile einer Strecke, eines Kreises, ... snappen können. Das funktioniert auch für die Schraublinie.

In MicroStation drückt man bei aktiviertem AccuDraw die Taste „k“ und man kann die Anzahl der Teilstücke einstellen.

Die umgestellte Fangfunktion liefert uns die Punkte der Schraublinie, in denen die anderen Drehachsen der Zylinder beginnen. Wir klicken einen Teilungspunkt der Schraublinie mit dem Werkzeug für Drehzylinder an und fixieren die Richtung der Drehachse in z-Richtung. Snappen wir nun einen beliebigen Punkt von k , fällt

MicroStation eine Normale auf die fixierte z-Richtung und der Drehzylinder endet in der richtigen Höhe.

 „Zylinder platzieren“ (3D-Haupt, 1a)

Das Snappen der Längen kann in MicroStation einfacher gemacht werden: Fixiert man die Zeichenrichtung von AccuDraw in Richtung der z-Achse, kann jeder Punkt der Ebene von k und damit auch jeder Punkt von k für die Bestimmung der Länge verwendet werden. Das funktioniert, weil die Ebene normal auf die Richtung der Achsen steht.

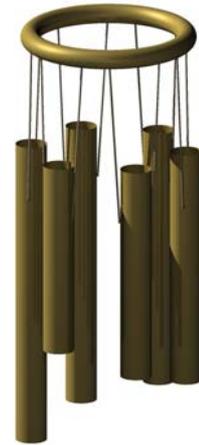


Abb.4.6: Bild mit MicroStation erstellt.

4.1.2 Allgemeine Schraubfläche

In diesem Kapitel wollen wir anhand einer allgemeinen Schraubfläche verschiedene Eigenschaften der Schraubflächen sichtbar machen. Dazu verschrauben wir eine beliebige Kurve, die keine spezielle Lage bezüglich der Schraubachse bzw. Schraubung hat.

Im folgenden Beispiel konstruieren wir die Schraublinie im Gegensatz zum Beispiel in Kapitel 4.1.1 interaktiv. Das Ziel davon ist, das Werkzeug „Schraublinie konstruieren“ gut zu beherrschen.

Beispiel: Schraubfläche mit Profilkurve in Form eines Pilzes

Wir unterwerfen eine ebene Kurve mit der Form eines Pilzes einer Rechtsschraubung, von der Achse und Ganghöhe bekannt sind. Als Erstes wollen wir die Profilkurve konstruieren.

Profil erstellen

Die zu verschraubende Kurve ist eine geschlossene kubische B-Spline-Kurve und liegt in der Ebene, die durch die Punkte $(5/0/0)$, $(5/10/0)$ und $(10/0/10)$ aufgespannt wird. Die Ebene stellen wir als Rechteck dar. Für die Konstruktion der Kurve benötigen wir zusätzlich drei Hilfslinien (siehe Abb.4.7: die Bruchangaben beziehen sich auf die Rechteckseiten bzw. Hilfsstrecken). Mit Hilfe dieser Linien können, wenn die Fangfunktion auf 5 Teilintervalle gestellt ist, alle für die Konstruktion der Kurve notwendigen Punkte gesnappt werden.

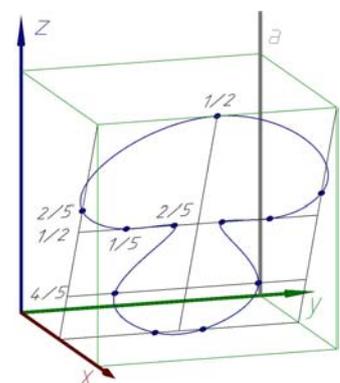


Abb.4.7

In der Toolbox „B-Spline-Kurven“ befindet sich die Funktion „B-Spline-Kurve platzieren“

(1a ). Wir verwenden die **Methode** „Durch Punkte“ und geben die Datenpunkte direkt ein.



Bei der Einstellung „Durch Punkte“ kann die Ordnung der B-Spline-Kurve nicht gewählt werden. MicroStation erstellt bei der Verwendung dieses Werkzeugs stets eine Kurve dritter Ordnung. Nun snappen wir die Punkte - wie in der Skizze vorgegeben - dem Kurvenverlauf folgend, wobei der Fangfunktionsdivisor durch Drücken der Taste „k“ auf 5 gestellt sein muss. Das Programm zeichnet automatisch mit. Mit der rechten Maustaste beendet man die Eingabe von Punkten und die Kurve wird endgültig gezeichnet.

Schraubung festlegen

Eine Schraubung wird durch Achse und Ganghöhe festgelegt. Die Achse a der Schraubung sei parallel zur z -Achse und gehe durch den Punkt $(0/10/0)$ und die Ganghöhe beträgt $h = 15 \text{ cm}$.

In den meisten CAD-Paketen gibt man eine Schraubung durch die Schraublinie eines beliebigen Punktes unter dieser Schraubung an. Daher beginnen wir mit einer Schraublinie.

Im Folgenden zeichnen wir – im Gegensatz zur ersten Konstruktion - die Schraublinie interaktiv, das heißt, wir geben die gesuchten Elemente und Längen durch Anklicken mit der Maus ein. Dabei folgen wir der Beschreibung von MicroStation, die unten links im Statusfenster steht.

Es erleichtert die Konstruktion, wenn man die Schraubachse durch eine Strecke darstellt, die in der Normalebene auf die Achse durch den zu verschraubenden Punkt beginnt und so lang ist wie die Schraublinie hoch sein soll. Wir verschrauben den Punkt $(0/0/0)$ und zeichnen 2 Gänge, daher beginnt a in $(0/10/0)$ und endet in $(0/10/30)$.  „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b)



Wir zeichnen also die Schraublinie ( „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a)) des Punktes $(0/0/0)$.

Mittelpunkt eingeben: Mit Mittelpunkt ist der Normalenfußpunkt des zu verschraubenden Anfangspunktes auf der Achse gemeint (hier $(0/10/0)$).

Radius definieren: Den Radius der Schraublinie legen wir durch den Anfangspunkt $(0/0/0)$ fest.

Steigungshöhe und Achse definieren: MicroStation bezeichnet die Ganghöhe als Steigungshöhe. Diese wird mit der Achse gleichzeitig festgelegt, wobei die Achse auch durch den „Mittelpunkt“ geht. Daher wählt man jenen Punkt der Achse, der vom „Mittelpunkt“ den Abstand „Ganghöhe“ hat. Es genügt auch jenen Punkt auszuwählen, dessen Verbindung mit dem Anfangspunkt parallel zur Achse ist und der vom Anfangspunkt den Abstand „Ganghöhe“ hat. Dazu ist es ratsam Accu-Draw in eine Ebene parallel zur Achse zu drehen. Wir verwenden AccuDraw um die Ganghöhe (15 cm) vom Anfangspunkt parallel zur Achse aufzutragen.

Höhe definieren: Damit ist gemeint, wie „hoch“ die Schraublinie gezeichnet werden soll, das heißt indirekt, wie viele Gänge bzw. Teile eines Ganges. Wir zeichnen zwei Gänge. Dazu snappen wir den Punkt (0/10/30).

Radius oben: Beim Festlegen der Höhe haben wir bemerkt, dass für MicroStation noch nicht klar ist, ob es sich um eine Schraub- oder Helispirallinie handelt. Mit dem Festlegen der Höhe der Schraublinie, ist auch die Lage des Endradius bestimmt, dessen Länge ist aber noch offen. Da der Endpunkt der Schraublinie nicht direkt gesnappt werden kann, geben wir die Länge des „Radius oben“ im AccuDraw-Fenster ein. Snappbar wird der „Radius oben“ dann, wenn man AccuDraw so dreht, dass es in der Ebene, die von der Achse und dem Anfangspunkt aufgespannt wird, liegt und eine der Hauptachsen von AccuDraw parallel zur Schraubachse ist. In unserem Fall liefert die Lage „Front“ das Geforderte. Fixiert man dann die Zeichenrichtung in Richtung des Endradius (hier entgegengesetzt der y-Achse) und snappt den Anfangspunkt, fällt AccuDraw eine Hilfsnormale auf die fixierte Zeichenrichtung, die im gesuchten Endradius beginnt. Der Endradius muss noch bestätigt werden, um die Konstruktion der Schraublinie abzuschließen.

Schraubfläche erstellen

Aus den Angabestücken Schraublinie, dazugehöriger Schraubachse und Profilkurve können wir die Schraubfläche erstellen.

Analog wie bei der Schraublinie gilt, dass CAD-Pakete Schraubflächen durch B-Spline-Flächen annähern. Ausführlicher ist diese Tatsache im Kapitel über die verschiedenen Werkzeuge beschrieben.



In der Toolbox „Fläche modellieren“ befindet sich die Funktion „Schraubfläche konstruieren“ (1a ) . Mit den ersten beiden gefragten **Maßstäben** legt man fest, ob die Profilkurve

während der Schraubung skaliert werden soll. Skalieren in Richtung des Radius wird bei „Maßstab des Abschnitts in X-Richtung“ fixiert und der „Maßstab des Abschnitts in Y-Richtung“ skaliert in Richtung der Höhe. Da das Profil nicht skaliert werden soll, setzen wir die Maßstäbe in x- und y-Richtung gleich eins. Der **Drehwinkel** soll gleich Null sein,

was bedeutet, dass das Profil unter der Schraubung nicht verdreht werden soll. Die beschriebene Einstellung der drei Werte erzeugt eine Schraubfläche.

Nacheinander müssen nun die Schraublinie, das Profil, die Schraubachse und ein beliebiger (Daten-)Punkt im Raum angeklickt werden. MicroStation zeigt dann das Ergebnis, in grau. Mit der linken Maustaste kann man das Ergebnis annehmen oder mit der rechten ablehnen, falls es nicht der Erwartung entspricht.

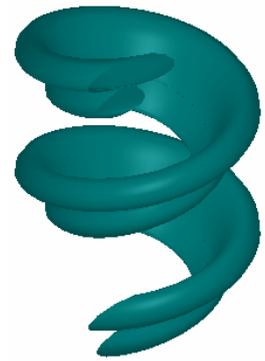


Abb.4.8

Querschnitt und Meridian

Um einen besseren Eindruck von der Form der Schraubfläche zu erhalten, konstruieren wir einen Quer- und Meridianschnitt der Fläche.

Die Querschnittsebene schneidet die Achse orthogonal und man muss sicherstellen, dass das Rechteck, das die Ebene darstellt, tatsächlich die Fläche ganz durchschneidet, damit die Schnittkurve komplett ist. Das Durchschneiden setzen wir mit der Funktion Trimmen um.

Das Rechteck, das einen Meridianschnitt erzeugt, muss nicht die ganze Fläche durchschneiden. Es genügt ein Schnitt mit einer Ebene, die die Achse als eine Seite des Rechtecks hat. Die gegenüberliegende Rechteckseite sollte die Fläche nicht durchsetzen, damit der ganze Meridian berechnet wird. Der Schnitt enthält, falls mehr als nur einen Gang gezeichnet wurde, schiebungsgleiche Teile.

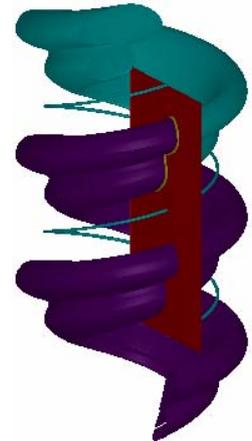
In der Toolbox „Fläche modellieren“ befindet sich die Funktion „Trimmung erstellen (Verkürzung erstellen)“ (1b ). Die erste Fläche soll die Schraubfläche sein, die zweite die Querschnitts- bzw. die Meridianebene. Wir wollen die erste Fläche getrimmt haben, die Schnittkurve lassen wir auch zeichnen. Wir klicken die beiden Flächen ihrer Nummer entsprechend nacheinander an. Nach



Klicken in das Fenster wird das Ergebnis gezeigt. (An dieser Stelle kann man noch Einstellungen im Funktionskasten ändern, die direkt angezeigt werden.) Abschließend muss das Ergebnis noch mit der linken Maustaste angenommen bzw. bei einem Fehler mit der rechten abgelehnt werden.

Schraubfläche mit Meridian- und Querschnitt erzeugen

Mit Hilfe einer dieser Schnittkurven kann man die Fläche ebenfalls erzeugen. Dazu verwenden wir wieder das Werkzeug zum Erstellen einer Schraubfläche und nehmen statt der Profilkurve den Querschnitt bzw. Meridianschnitt.



*Abb.4.9:
Schraubfläche mit
Meridian konstruiert*

4.2 Kreisschraubflächen

Wie der Name schon sagt, befassen wir uns in den nächsten Beispielen mit Flächen, die durch Verschrauben eines Kreises entstehen. Je nach Lage des erzeugenden Kreises zur Schraubachse können zahlreiche Typen unterschieden werden. Wir betrachten jene drei Typen, die in unserer Umwelt am meisten Anwendung finden:

1. Meridiankreisschraubfläche
2. Schichtenkreisschraubfläche
3. Schraubrohrfläche

4.2.1 Meridiankreisschraubfläche

Geht die Ebene des erzeugenden Kreises durch die Schraubachse, so ist der Kreis ein Bestandteil des Meridians der Schraubfläche.

Die Fläche tritt im Bauwesen bei überwölbten Wendeltreppen auf, sowie im Maschinenbau bei sogenannten Rundgewinden, deren Meridian aus Kreisbögen zusammengesetzt ist. Solche Gewinde werden dort verwendet, wo es auf leichte Lösbarkeit ankommt. Ein bekanntes Beispiel ist der Sockel und die Fassung einer Glühbirne.

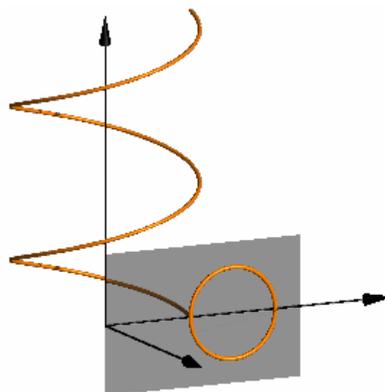


Abb.4.10



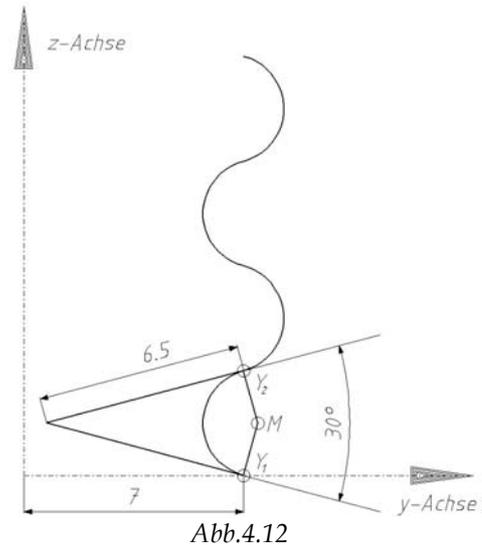
Abb.4.11, Grader E., 2003

Beispiel: Rundgewinde

Ein Rundgewinde hat einen Meridianschnitt, der aus kongruenten Kreisbögen besteht, die einander berühren.

Konstruieren des Profils

Als Achse der Schraubung und des Gewindes wählen wir die z -Achse. Das Profil legen wir in die yz -Ebene. Die Tangenten in den Endpunkten des Kreisbogens schließen einen Winkel von 30° ein. Aus Symmetriegründen ist der Winkel zwischen der y -Achse und einer Tangente halb so groß. Somit legen wir eine Strecke mit Länge 6,5 cm durch den Punkt $Y_1=(0/7/0)$ mit Neigung 15° und vom Endpunkt aus die andere Tangente -30° gegenüber der ersten geneigt und ebenfalls 6,5 cm lang $\Rightarrow Y_2$.



Den Kreismittelpunkt M ermitteln wir als Schnittpunkt der Normalen auf die Tangenten durch Y_1 und Y_2 , womit der Kreis bzw. ein Kreisbogen gezeichnet werden kann.

Das Profil lässt sich am leichtesten fertigstellen, indem man den gezeichneten Kreisbogen um 180° dreht oder spiegelt (Kopie erstellen) und richtig positioniert. Die einzelnen Kreisbögen sollten zum Schluss noch zu einer durchgehenden Kurve verbunden werden.

Alle für das Erstellen des Profils notwendigen Funktionen findet man in der „Hauptpalette“. Kurz sei das Verbinden der einzelnen Bögen zu einer Kurve erwähnt. In MicroStation erfolgt es mit der Funktion „komplexe Kette erstellen“ (6a ). Dazu werden alle Bögen nacheinander angeklickt und am Schluss stellt man mit der rechten Maustaste die Kette fertig.

Schraubung durch Schraublinie festlegen

Für diesen Konstruktionsschritt sind nur die Schraubachse und das Profil wichtig: Die Schraubachse ist die z -Achse und die Ganghöhe ist durch das Profil festgelegt. Der erste Kreisbogen muss bei der Schraubung in den dritten übergeführt werden, also geht der unterste Punkt des ersten in den untersten des dritten Bogens über, womit die Ganghöhe einfach gesnappt werden kann. Das Hineindreuen in eine Fassung erfolgt bei uns nach rechts, weswegen unser Gewinde durch eine Rechtsschraubung entstehen soll.

Wir unterwerfen nun den Punkt $Y_1=(0/7/0)$ dieser Schraubung. Um nicht anschließend die Fläche verlängern zu müssen, zeichnen wir die Schraublinie von vornherein so hoch, dass Y_1 in den obersten Punkt des Profils übergeht.

Wir verwenden die Funktion „Helix platzieren“ (Fläche modellieren, 1a ) und verzichten auf die Eingabe über die Tastatur, da alle Elemente einfach gesnappt werden können.

Profil verschrauben

Aus der Angabe der Schraublinie, der dazugehörigen Schraubachse und der Profilkurve können wir nun die Fläche erstellen.

 „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a)

Schraubfläche abschneiden

Bis jetzt haben wir eine dünne Flächenhaut erzeugt, die wir zu einem Volumen umgestalten möchten, da die meisten Gewinde gefüllt sind. Dazu schneiden wir die Fläche oben und unten mit einer Ebene ab, sodass der Querschnitt der Fläche stets eine geschlossene Kurve ist. Die unterste Ebene, die einen geschlossenen Querschnitt liefert, hat die Gleichung $z = \text{Ganghöhe}$,

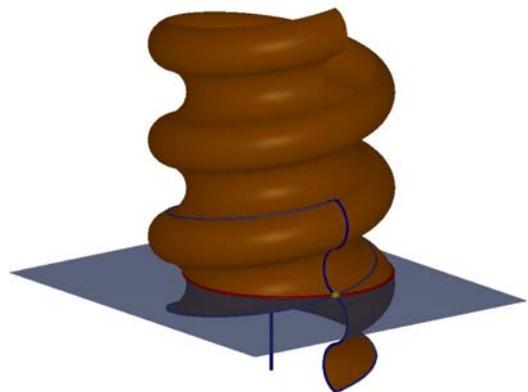


Abb.4.13

wobei die Ebene $z = 0$ durch Y_1 geht. Die oberste Ebene, die eine geschlossene Schnittkurve erzeugt, liegt eine Ganghöhe unter dem höchsten Punkt der Schraubfläche. (Die nächsten Überlegungen sind nur für das untere Ende der Fläche beschrieben. Am oberen Ende ließen sie sich analog formulieren.) Der kritische Punkt der Fläche (siehe Skizze: ist gelb markiert) bei dieser Konstruktion hat als z -Koordinate die Ganghöhe. Dieser Punkt liegt am „Rand“ der Fläche. Liegt dieser Punkt auch am „Rand“ des Rechtecks, mit dem wir die Schraubfläche abschneiden wollen, kann es zu Schwierigkeiten von Seiten der Software kommen.

Für das Abschneiden der Fläche verwenden wir wieder das Werkzeug „Trimmen“. In erster Linie brauchen wir nur die Schraubfläche abschneiden, es kann jedoch auch die Schnittkurve gezeichnet und die Ebene zu einem Deckel abgeschnitten werden.

 „Trimmung erstellen“ (Fläche modellieren, 1b)

In Volumen umwandeln

Ist die Schraubfläche oben und unten abgeschnitten, kann sie einfach in ein Volumen umgewandelt werden. Für das fertige Bild wurde das Rundgewinde noch um einen Gang nach unten verschoben.

Das Werkzeug „3D umwandeln“  befindet sich in der Toolbox „Fläche modellieren“ (1b). Das Werkzeug wird verwendet, um ein Volumenelement in eine einfache Fläche umzuwandeln oder umgekehrt. Wir wollen die konstruierte Fläche in ein Volumen umwandeln. Dazu schließt MicroStation die Fläche durch Deckflächen und füllt den abgeschlossenen Bereich aus.

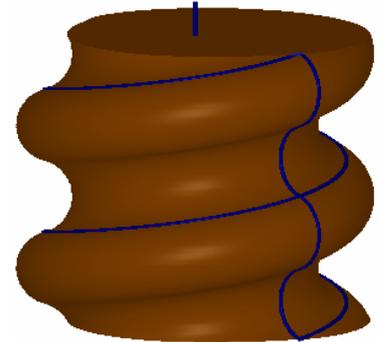


Abb.4.14



Um die Fläche in ein Volumen umzuwandeln, muss die Fläche angeklickt werden und danach bestätigt werden.

4.2.2 Schichtenkreisschraubfläche

Ist die Ebene des erzeugenden Kreises normal auf die Schraubachse, so ist der Kreis ein Querschnitt der Schraubfläche.

Umschließt der Kreis die Schraubachse, so entsteht eine Fläche, die man bei geschwungenen Säulen findet. Schraubfräser zur Bearbeitung ebener Flächen besitzen oft Querschnitte, die aus einander berührenden Kreisbögen bestehen, sodass die Fräseroberfläche aus einzelnen Zonen von Schichtenkreisschraubflächen besteht.

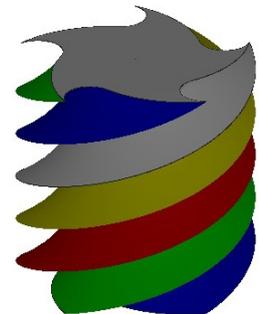


Abb.4.15: Fräser

Eine Schichtenkreisschraubfläche trägt eine Schar kongruenter Kreise, die in parallelen Ebenen liegen und kann daher auch als Schiebfläche erzeugt werden. Jeder Punkt des Kreises durchläuft bei der Schraubung eine Schraublinie, die kongruent zur Mittenschraublinie ist und eine zur Achse der Mittenschraublinie parallele Achse besitzt.

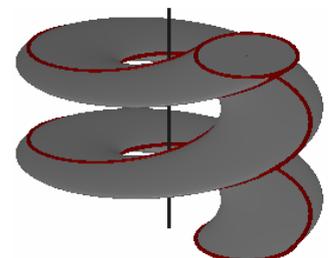


Abb.4.16

Beispiel: Geschwungene Säule

Konstruieren des Profils

Eine geschwungene Säule entsteht durch das Verschrauben von Kreisen, die in einer waagrechten Ebene liegen. Dazu verschrauben wir aber nicht die Kreise als Ganzes, sondern nur jene Segmente, die für die Oberfläche der Säule interessant sind.

Wir zeichnen in der xy -Ebene zwei Kreise k_1 und k_2 , die beide im Ursprung zentriert sind, mit Radius $r_1 = 10$ bzw. $r_2 = 3$ cm.

Für unser Profil suchen wir einen Kreis, der k_1 innen und k_2 außen berührt. Dazu snappen wir keine Punkte, sondern stellen die Fangfunktion auf „tangential“ und markieren die Kreise in Bereichen, die bezüglich des Ursprungs gegenüber liegen. Dadurch erhalten wir eine Schar von Kreisen, aus der wir einen beliebigen Kreis k auswählen.

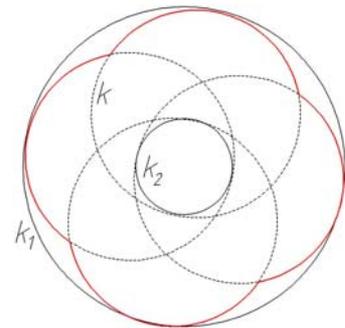


Abb.4.17

Für das vollständige Profil drehen wir k um den Ursprung dreimal um 90° weiter. Abschließend löschen wir die Teile der Kreise, die im Inneren von anderen liegen und hängen diese zu einer durchgehenden Linie zusammen.

Beim Konstruieren des Kreises k müssen wir die Fangfunktion auf „tangential“  umstellen. Allerdings erkennt AccuSnap die Kreise nicht als mögliche Objekte, die gesnappt werden können. So fangen wir die Objekte (soweit es vom Benutzer nicht anders festgelegt wurde) durch das gleichzeitige Drücken der beiden Maustasten. Es kann hilfreich sein AccuSnap dazu auszuschalten.

Um den Kreis zu vervielfältigen, verwenden wir die Funktion „Matrix konstruieren“ (Hauptpalette 8b ). Da die Elemente durch Drehung ineinander übergehen, verwenden wir den Matrixtyp „Polar“. Insgesamt wollen wir vier Objekte, die jeweils um 90° verdreht sind. Wenn die Option „Objekte drehen“ aktiviert ist, werden die Elemente um den Mittelpunkt der Matrix gedreht, was zum gewünschten Ergebnis führt, dass durch Anklicken des Kreises k und des Mittelpunkts von k_1 erzeugt wird.



Die Funktion „Bereich erstellen“ (Hauptpalette, 9b ) ist vergleichbar mit den Booleschen Operationen im Dreidimensionalen, nur arbeitet sie mit ebenen Elementen. In unserem Fall leistet die Vereinigung der vier Kreise das Erwünschte.

Schraubung festlegen

Die Achse der Schraubung liegt in der z-Achse. Wir stellen sie durch eine Strecke dar, deren Länge der Ganghöhe (50 cm) entspricht.

Die Schraubung legen wir wiederum durch eine Schraublinie fest und zeichnen daher die Bahnschraublinie eines Punkts des Profils. Die „Höhe“ der Kurve ist gleich der Ganghöhe der Schraubung.

 „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a)

Profil verschrauben

Mit der Funktion „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a

) konstruieren wir durch Anklicken der Schraublinie, des Profils und der Achse ein Flächenmodell der Oberfläche der Säule.



Abb.4.18

In Volumen verwandeln

Da eine Säule nicht besonders tragfähig wäre, wenn sie wie in unserer Zeichnung nur aus einer dünnen Haut bestehen würde, verwandeln wir die Fläche in ein Volumen. (In manchen Fällen kann es notwendig sein die Fläche mit einem Deckel und einem Boden abzuschließen und die Flächen zusammenzuhängen.)

 „3D konvertieren“ (Fläche modellieren, 1b)

Material zuweisen

Um der Säule mehr Realitätsnähe zu verschaffen, ordnen wir ihr ein Material zu.

Das Zuweisen eines Materials geschieht in dem Menüpunkt **Einstellungen-Rendern-Material zuweisen**. Ein Fenster wird geöffnet, in dem wir als Erstes unter **Datei** eine **Palette öffnen**. Auf der Suche nach Marmor werden wir in der Palette „floors.pal“ fündig: **Marble High Gloss**. Wir markieren das gewünschte Material. In der Menüleiste unter **Funktionen** finden wir **Durch Auswahl zuweisen**. Durch Anklicken der Säule kann nun das Material zugewiesen werden. Zu beachten ist, dass alle Objekte in einer Ansichtsebene mit der gleichen Farbe mit diesem Material belegt werden.

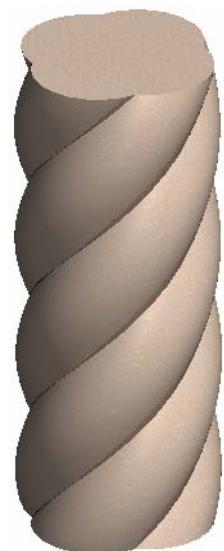


Abb.4.19

4.2.3 Schraubrohrfläche

Die bei der Verschraubung einer Kugel entstehende Hüllfläche ist eine Schraubfläche (weil sie unter der Einwirkung der erzeugenden Schraubung in sich übergeht), gleichzeitig aber auch eine Rohrfläche, die die Schraublinie der Kugelmitte als Mittellinie hat (*Mittenschraublinie*). Eine Rohrfläche wird von jeder erzeugenden Kugel längs eines Großkreises berührt, dessen Ebene normal zur Mittellinie ist. Daraus folgt, dass die Fläche auch durch Verschrauben eines solchen Kreises erzeugt werden kann und damit zu den Kreisschraubflächen gehört. Dieser Kreis liegt in einer Ebene normal zur Schraublinie bzw. deren Tangente.

Verwendung finden Schraubrohrflächen bei Kühlschlangen, Spiralfedern, Kugellagern von Schraubgelenken, Drahtwicklungen, usw. Um die typische Schlangenrohrform zu erhalten, muss der Kugelradius hinreichend klein gewählt werden, damit die Schraubachse nicht getroffen wird und aufeinander folgende Gänge der Fläche einander nicht durchdringen.

Beispiel: Radständer

Diesen Radständer findet man mittlerweile fast in ganz Österreich, denn die Supermarktkette „Hofer“ hat ihn auf ihre Parkplätze gestellt.

Ich habe mich für dieses Beispiel entschieden, da wir gewohnt sind entlang der z-Achse zu verschrauben und es daher bereichernd ist, eine Schraubfläche mit einer anderen Achse zu betrachten.



Abb.4.20, Grader D., 2003, Wien

Schraubung festlegen

Da die Lage des zu verschraubenden Kreises von der Steigung der Schraubung abhängt, konstruieren wir als Erstes eine geeignete Mittenschraublinie. Die Schraubachse legen wir parallel zur y -Achse durch den Punkt $M=(0/0/33)$. Der Radius der Schraublinie beträgt 14 cm und wir wählen als Anfangspunkt den Punkt $A=(0/0/47)$, weil es dadurch am einfachsten gelingt, die Stütze senkrecht nachzumodellieren. Vom Punkt A bis zum Endpunkt der Mittenschraublinie mit derselben

z-Koordinate sind 11 Gänge, wobei die Ganghöhe 9,8 cm ist. Damit lässt sich die y-Koordinate des Endpunktes berechnen: $9,8 \cdot 11 = 107,8$ cm.

 „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a)

Kreis normal auf Schraublinie konstruieren

Wir zentrieren den Kreis im Anfangspunkt A und sein Durchmesser soll 4,8 cm betragen. Um die Normalebene auf die Mittenschraublinie zu konstruieren, zeichnen wir als Erstes die Tangente an diese. Dazu verwenden wir die Snapfunktion, die uns die Tangente an eine Kurve in dem angeklickten Punkt erstellt. (Sollte diese Funktion nicht vorhanden sein, ist im Kapitel 1.1.2 die klassische Konstruktion einer Tangente an die Schraublinie beschrieben.)

Mit Hilfe eines Hilfskoordinatensystems in A legen wir die Normalebene fest. Die neue x-Achse zeigt in Richtung der konstruierten Tangente und die y-Achse steht normal auf die Schraubachse – geht also durch M. Für die Konstruktion des Kreises drehen wir nun die Kreisebene in die neue yz-Ebene, die auf die Tangente normal steht.

MicroStation hat eine geeignete Snapfunktion „Punkt auf Tangente“ . (Eventuell muss man dazu die Schaltflächenleiste der Fangfunktionen öffnen). Nachdem wir das Werkzeug für das Zeichnen von Geraden gewählt haben, stellen wir die Fangfunktion „Punkt auf Tangente“ ein und snappen A. Wir bestätigen die Richtung der Tangente und können danach noch die Länge wählen.

(Falls Probleme beim Snappen der Tangentenrichtung auftauchen, kann man die Tangente auch mit „Kurve auswerten“ (B-Spline-Kurven, 1b ) konstruieren.)

In der Toolbox „Hilfskoordinaten (ACS)“ finden wir als zweite Funktion „ACS definieren (durch Punkte)“ . Wir snappen also A, einen Punkt der Tangente an die Schraublinie – das legt die Richtung der neuen x-Achse fest- sowie M – wodurch die y-Achse festgelegt wird.

Beim Zeichnen des Kreises beginnen wir wie gewohnt mit dem Mittelpunkt. Nun kommt das neue Koordinatensystem zum Tragen. Der Kreis soll in der yz-Ebene liegen. Durch Drücken der Taste „E“ wechselt AccuDraw die Hauptlagen des neuen ACSs und der Kreis kann mit dem gewünschten Radius gezeichnet werden.

Kreis verschrauben

 „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a)

Stützen konstruieren

Die beiden Stützen sind gleich, daher konstruieren wir eine Stütze und kopieren sie an das andere Ende des Radständers. Wir beginnen an dem Ende der Schraubfläche, wo wir bereits das Hilfskoordinatensystem gelegt haben.

Die Stütze des Radständers besteht aus einem Zylinder und einem Torusteil. Um einen glatten Übergang zwischen Schraubrohrfläche, Torus und Zylinder zu schaffen, konstruieren wir die Stützen, indem wir eine passende Mittellinie einer Rohrfläche erzeugen. Die Mittellinie besteht also aus

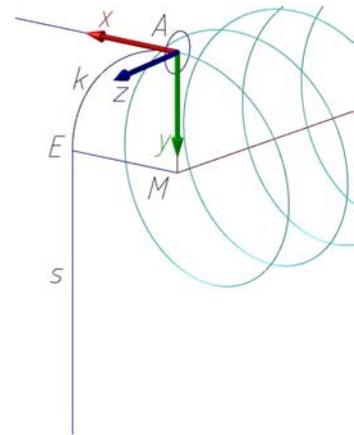


Abb.4.21

- einem Kreisbogen k , der in der xy -Ebene des Hilfskoordinatensystems liegt, den gleichen Radius wie die Mittenschraublinie hat und im Punkt A die gleiche Tangente wie die Schraublinie besitzt und
- einer in E tangential anschließenden lotrechten Strecke s , die 33 cm lang ist.

Wir platzieren den Kreisbogen und die Strecke mit „SmartLine platzieren“ (Hauptpalette, 2b ). Für den Kreisbogen stellen wir „Segmentart“ auf „Bögen“ und klicken A und M an. Der Radius des Kreisbogens ist damit bestimmt und wir legen mit einem weiteren Punkt den Winkel des Kreisbogens auf 90° fest, damit der Endpunkt E des Bogens eine lotrechte Tangente besitzt. Wir stellen „Segmentart“ auf Linie (ohne die Konstruktion der Smartlinie abzuschließen) und zeichnen die lotrechte Strecke. Dadurch erzeugen wir den Pfad direkt als komplexe Kette.

Den Kreis, den wir für die Erzeugung der Schraubrohrfläche verwendet haben, bewegen wir längs des Pfades und erstellen dabei die Stützen.

„Entlang eines Pfades Extrudieren“ befindet sich in der Toolbox 3D-Haupt (1b ). Wir wählen bei Typ „Fläche“ aus, da wir sie mit der Schraubrohrfläche zusammenkleben wollen. Da wir das Profil und den Pfad bereits gezeichnet haben, lassen wir die beiden Kästchen unangekreuzt. Bei der Einstellung „Anhängen“ kann man zwischen „Pfad an Profil“ und „Profil an Pfad“ auswählen. In unserem Fall soll das Profil entlang des Pfades verschoben werden. Zuerst klicken wir den Pfad an, dann das Profil und bestätigen das Ergebnis mit der linken Maustaste.

Die beiden Stützen sind kongruent und so kopieren und drehen wir die konstruierte Stütze um 180° um die y -Achse des Hilfskoordinatensystems und verschieben sie an das Ende der Schraubrohrfläche.

Radständer fertigstellen

Die beiden Stützen verbinden wir mit der Schraubrohrläche zu einer Fläche. Da das Metall des Ständers eine bestimmte Dicke hat, erstellen wir ein dünnes Volumenelement. Wir wählen die Metallstärke mit 0,5 cm.

Mit „Flächen vereinigen“ (Fläche modellieren, 1b ) muss die erste Stütze, die Schraubrohrläche und die zweite Stütze angeklickt und abschließend bestätigt werden.

In der Toolbox 3D-Haupt befindet sich das Werkzeug „Auf Volumenelement verdicken“ (1b ). Wir wollen nur nach Innen verdicken und geben die Stärke direkt ein. Wir klicken den zu verdickenden Körper an. MicroStation zeichnet von dem Punkt aus, an dem wir das Objekt angeklickt haben, einen kleinen Pfeil, mit dessen Spitze man festlegt, in welche Richtung man die Fläche verdicken will.

Unter den Stützen befindet sich noch eine zylindrische Platte mit Radius 7 cm und Höhe 0,5 cm. Wir stellen sie als Volumen dar, um sie abschließend mit dem gezeichneten Körper zum Radständer zu vereinigen.

 „Zylinder platzieren“ (3D-Haupt, 1a)

 „Volumen vereinigen“ (3D-Haupt, 2a)

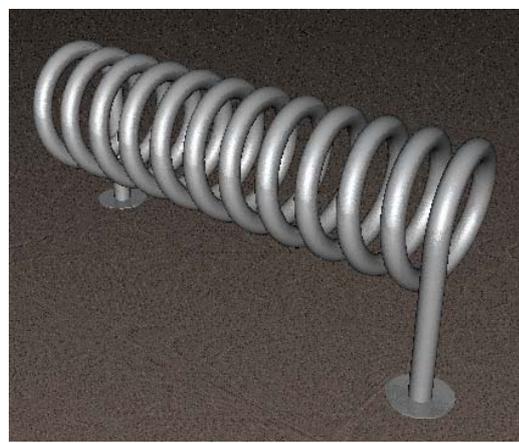


Foto vom Radständer, Grader D., 2003 Bild des Radständers mit MicroStation erstellt
Abb.4.22

4.3 Regelschraubfläche

Verschraubt man eine Gerade, so entsteht eine Regelschraubfläche. Ist die Erzeugende windschief zur Schraubachse, so heißt die Fläche offen, sonst geschlossen. Liegt die Gerade in einer Ebene normal zur Achse, so wird die Fläche gerade genannt, sonst schief.

Daraus ergeben sich 4 Typen von Regelschraubflächen:

- gerade geschlossene
- schiefe geschlossene
- gerade offene
- schiefe offene

	geschlossen	offen
gerade		
schief		

Abb.4.23: 4 Arten von Regelschraubflächen, List C., 2004, S. 78

Im Folgenden behandeln wir eine gerade geschlossene Regelschraubfläche (Wendelfläche). Schiefe geschlossene und gerade offene werden in der Diplomarbeit von List Christine: Konstruktive Behandlung von Regelflächen mit CAD-Software anhand ausgewählter Beispiele für den Schulunterricht, Wien 2004, behandelt.

4.3.1 Wendelfläche

Der speziellste und einfachste Typ, die gerade geschlossene Regelschraubfläche, entsteht durch Verschrauben einer Geraden, die die Schraubachse normal schneidet.

Die Trittkanten der Stufen einer Wendeltreppe liegen auf einer solchen Fläche. In Parkhäusern findet man Wendelflächen oft, um von einem Stockwerk zum nächsten zu gelangen. Im Maschinenbau tritt sie zum Beispiel bei dem für starke Druckbeanspruchung bestimmten „flachgängigen“ Gewinde auf, außerdem bei Förderschnecken und Schiffsschrauben.

Die Erzeugenden der Wendelfläche sind gleichzeitig ihre Meridiane und ihre Querschnitte.

Jeder Punkt der Erzeugenden beschreibt bei der Schraubung eine Schraublinie. Je kleiner der Radius der Schraublinie ist, desto größer ist die Steigung ihrer Tangenten.

Projekt: Radrampe auf die Floridsdorferbrücke

Die Fahrradrampe, die es ermöglicht mit dem Fahrrad auf die über die Donau führende Floridsdorferbrücke zu gelangen, hat die Form einer Wendelfläche.



Abb.4.24: Radauffahrt, Blick Richtung Donau



Abb.4.25: Radauffahrt, Blick von Fahrspur nach Innen

Der innerste Punkt der Fahrbahn beschreibt eine Schraublinie mit Radius 6 m und Ganghöhe 3 m. Die Fahrbahn selbst hat eine Breite von 4,80 m und hat eine Metallkonstruktion, die wegen einer 60 cm dicken Randverdeckung nur schwer abmessbar ist und daher weggelassen wird. 6 Stützen innerhalb und 7 außerhalb der Fahrspur tragen diese. Die Stützen sind Zylinder und haben einen Durchmesser von 38 cm und ihre Höhe ist abhängig von der jeweiligen Position. Betrachtet man nur den obersten Gang, so enden die Säulen alle 1,35 m über der Fahrbahn. Ihr Abstand zum Fahrbahnrand beträgt 10 cm. Das Gelände besteht aus zwei kongruenten Schraubrohrflächen (Radius 5 cm), deren Mittellinien 1 m bzw. 10 cm über der Fahrbahn liegen.

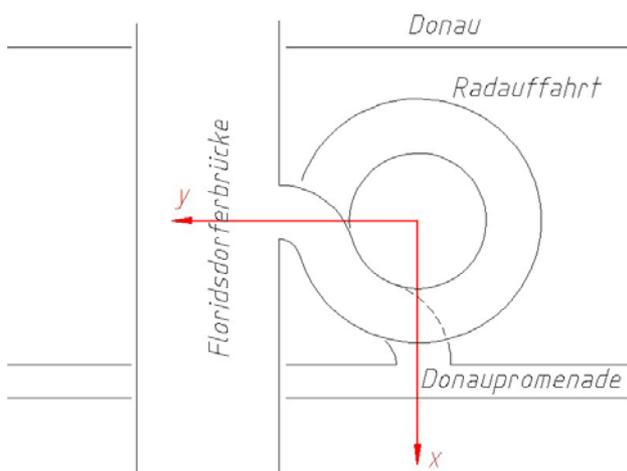


Abb.4.26: Lage der Rampe

Koordinatensystem

Für die Konstruktion legen wir als Erstes ein Koordinatensystem in die Radauffahrt. Die z -Achse soll auf der Schraubachse liegen. Der Weg, der zur Radauffahrt führt (Donaupromenade) und die über die Wendelfläche erreichbare Brücke, haben orthogonale Richtungen. Daher eignen sich ihre Richtungen für die x - und y -Achse des Koordinatensystems. Parallel zur

Brücke legen wir die x -Achse und parallel zur Donaupromenade die y -Achse. Die Fahrbahn wird durch eine Gerade erzeugt, die normal zur Schraubachse steht. Die unterste der Erzeugenden schließt mit der Richtung der x -Achse 20° ein. Auf dieser Geraden soll der Ursprung liegen.

Schraubung festlegen

Alle Schraubgebilde der Radauffahrt (Fahrbahn, Randverdeckung, Geländer) entstehen durch die selbe Schraubung. Ihre Ganghöhe, Achse und Schraubrichtung ist für alle gleich. Deshalb legen wir diese als Erstes durch eine geeignete Schraublinie s fest. Wir verwenden dazu den inneren Fahrbahnrand, der durch den Punkt P_i erzeugbar ist. Damit kennen wir von der zu zeichnenden Schraublinie Achse, Anfangspunkt, Ganghöhe. Aus dem Foto (Abb.4.24) lesen wir ab, dass es sich um eine Linksschraubung handelt. Von Interesse ist nun noch, wie viele Gänge gezeichnet werden sollen. Die „erste“ Erzeugende schließt wie bereits erwähnt einen Winkel von 20° mit der x -Achse ein, die „letzte“ mit einer Parallelen zur x -Achse einen Winkel von 74° . Um von der ersten in die letzte Lage zu kommen, benötigen wir einen Drehwinkel von 54° plus die Anzahl der vollen Gänge mal 360° . In unserem Fall sind es zwei volle Gänge, also ist der Drehwinkel 774° und die dazu gehörige Schieblänge $\frac{774}{360} \cdot 3 = 6,45$ m.

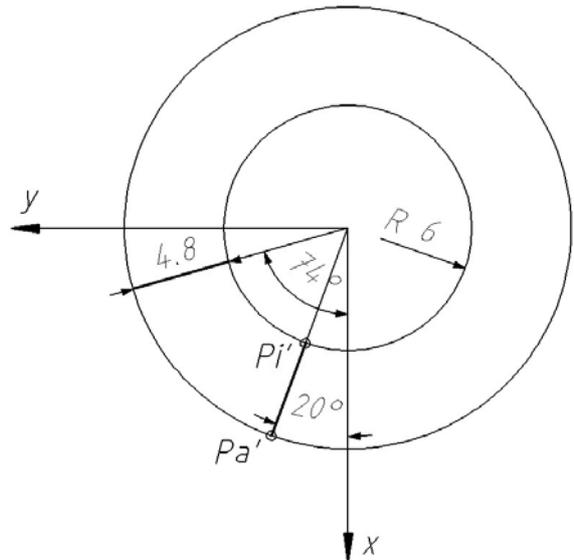


Abb.4.27

Für die folgenden Konstruktionen verwenden wir repräsentierend für die Schraubung die Schraublinie s .

 „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a)

Fahrbahn

Die Fahrbahn ist eine Wendelfläche. Ihre Erzeugenden treffen die Schraubachse a und schließen mit a einen rechten Winkel ein. Da die Fahrbahn 4,8 m breit ist, verschrauben wir eine Strecke mit dieser Länge, deren Verlängerung die erwähnten Kriterien erfüllt und durch P_i geht. (Pa ist das andere Ende der Strecke)

 „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a)

Randverdeckung

Die Randverdeckung ist ein Ausschnitt einer Zylinderfläche (Schraubzylinder) und kein Volumen. (Foto weiß). Sie verdeckt die Stahlkonstruktion der Fahrbahn und trägt zur Stabilität der Fahrbahn bei. Dieser Ausschnitt des Schraubzylinders lässt

sich durch eine senkrechte Strecke mit der Höhe der Randverdeckung (60 cm) in den Punkten P_i und P_a erzeugen. Die Randverdeckung verschwindet unten in der Erde. Da das Ufer nur leicht geböscht ist, stellen wir es durch eine waagrechte Ebene, die die unterste Erzeugende der Fahrbahn enthält, dar. Mit der waagrechten Ebene trimmen wir die Randverdeckung.

 „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b)

 „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a)

 „Rechteck platzieren“ (Hauptpalette, 3b)

 „Trimmung erstellen“ (Fläche modellieren, 1b)

Geländer

Das Geländer außen bzw. innen besteht aus zwei kongruenten Schraubrohrflächen, die am Ende durch zwei Tori und einen Zylinder verbunden sind. Der Radius der „Rohre“ beträgt 5 cm. Die äußere untere Schraubrohrfläche entsteht durch einen Kreis mit Mittelpunkt $M_a = (10,75/20^\circ/0,1)^{10}$. Da die Kreisebene normal auf die Tangente der Mittenschraublinie steht, konstruieren wir die Tangente in M_a .



Abb.4.28. Geländer

Wir verwenden dazu das Drehfluchtprinzip, weil wir die Schraubung durch s angeben und damit die Schraublinie von M_a für die Konstruktion der Schraubrohrfläche nicht brauchen. Der Richtpunkt R der Schraubung, der für das Drehfluchtprinzip wichtig ist, liegt auf der Schraubachse und seine z -Koordinate entspricht dem Parameter der Schraubung mit negativem Vorzeichen versehen, da es sich um eine Linksschraubung handelt ($p = -\frac{3}{2\pi}$ m). Das Drehfluchtprinzip besagt: Unterwirft man $M'_a = (10,75/20^\circ/0)$ einer negativen Vierteldrehung und verbindet diesen Punkt (M'_a) mit R , so ist die erhaltene Gerade parallel zur Schraubtangente in M_a .

Um einen Kreis in der Normalebene auf die Tangente zu zeichnen, legen wir ein Hilfskoordinatensystem so, dass die x -Achse parallel zur Tangente ist. Die yz -Ebene des Hilfssystems legt die gesuchte Normalebene fest.

¹⁰ Zylinderkoordinaten ($r/\varphi/z$) gegeben in ([m]/[Grad]/[m])

Wir legen also den Ursprung des Hilfskoordinatensystems in den Richtpunkt und die x -Richtung durch M_u . Da für uns nur die Lage der yz -Ebene, die durch die x -Achse fixiert ist, wichtig ist, nicht aber die Richtung der y - und z -Achse, könnte diese beliebig gewählt werden. Für spätere Konstruktionen ist es von Vorteil, dass die xy -Ebene des neuen Systems die Schraubachse beinhaltet. Das ist gewährleistet, wenn man für die y -Richtung, die Schraubachse anklickt. Die y -Achse des Hilfssystems liegt nicht auf der Schraubachse, da der Winkel zwischen der Verbindung

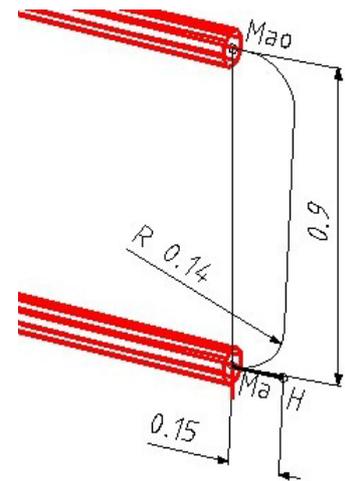


Abb.4.29

von M_uR und der Schraubachse kein rechter Winkel ist. Die Lage des Hilfssystems speichern wir. In der Parallelebene durch M_a zur yz -Ebene des Hilfskoordinatensystems zeichnen wir nun den erzeugenden Kreis mit Radius 5 cm. Damit sind alle Elemente – eine Schraublinie um die Schraubung anzugeben, das Profil und die Achse –, die für das Zeichnen der Schraubrohrfläche notwendig sind, konstruiert und wir erstellen einen Teil des Geländers.

1 m über der Fahrbahn liegt eine weitere Schraubrohrfläche, die kongruent zur konstruierten ist. Wir verschieben im Kopiermodus die gezeichnete Fläche daher um 90 cm lotrecht nach oben. Dabei geht M_a in $M_{ao} = (10,75 / 20^\circ / 1)$ über.

Wir gehen analog für das innere Gelände vor, wobei die innere untere Mittenschraublinie im Punkt $M_i = (6,05 / 80^\circ / 0,93)$ beginnt. M_i liegt 0,1 m über der Schraubfläche und addiert man dazu die zum Drehwinkel 80° gehörige Schieblänge („Schieblänge = Drehwinkel \times Parameter“), so erhält man die z -Koordinate von M_i . Unterwirft man den Kreis, der die innere untere Schraubrohrfläche erzeugt, der Schraubung, die durch die anfangs gezeichnete Schraublinie s festgelegt ist, so ist die Schraubrohrfläche zu lang. Deshalb erstellen wir eine Kopie s_i von s und löschen diese bis M_i . s_i stellt nun die Schraubung mit verminderter Höhe dar und ist für das Konstruieren des Innengeländers geeignet.



„ACS definieren (durch Punkte)“ (Hilfskoordinaten (ACS), 2)



„Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a)

Mit dem Werkzeug „Teil löschen“ (Hauptpalette, 9b ) verkürzen wir s . Wir snappen die Schraublinie in P_i , damit MicroStation weiß, von welcher Seite weg die Kurve gelöscht werden soll und anschließend M_i , um das neue Ende der Kurve anzugeben.

Das Verbindungsstück zwischen den beiden Schraubrohrflächen besteht aus zwei Toristücken und einem Zylinder. Wir erzeugen diese aber nicht einzeln, sondern

geben einen Pfad an, entlang dem ein Kreis wandert und dabei die Fläche erzeugt. Dadurch entsteht das Verbindungsstück als Ganzes und wir müssen nicht überlegen wie lang der Zylinder und die Toristücke sein müssen. Die folgende Konstruktionsbeschreibung bezieht sich auf das äußere Gelände, ist aber analog für das innere anwendbar. Der gesuchte Pfad liegt in einer lotrechten Ebene durch die Schraubtangente. Da die xy -Ebene des vorher gespeicherten Hilfskoordinatensystems in dieser Ebene liegt, verwenden wir dieses wieder. Den Pfad zeichnen wir in der neuen xy -Ebene als Streckenzug, der abgerundete Ecken hat. Da wir die Schraubtangente in M_a kennen, beginnen wir in M_a mit einer 0,15 m langen Strecke in Richtung der Tangente. Die nächste Strecke steht normal auf die Tangente und die Länge snappen wir durch M_{a0} , indem wir vorher die Richtung der Strecke fixieren. Wir beenden den Streckenzug anschließend im Punkt M_{a0} .

Den schon für die Schraubrohrfläche verwendeten Kreis, extrudieren wir nun längs dieses Pfades.

Für die Konstruktion des Pfades verwenden wir das Werkzeug „SmartLine platzieren“ (Hauptpalette, 2b ). Die Segmente des Pfades sind Linien, deren Ecken abgerundet sind. Den Verrundungsradius wählen wir mit 0,14 m.



 „Entlang eines Pfades Extrudieren“ (3D-Haupt, 1b)

Die Gitterelemente dazwischen könnte man durch eine diskrete Schraubung in die richtigen Positionen legen. Da die meisten CAD-Programme das nicht können, ersetzen wir die Gitterelemente durch ein von zwei Schraublinien begrenztes Stück eines Schraubzylinders. Wir erzeugen dieses Flächenstück, indem wir eine lotrechte Gerade verschrauben. Die Erzeugende soll auf der Strecke $M_a M_{a0}$ zentriert sein und 80 cm lang sein.

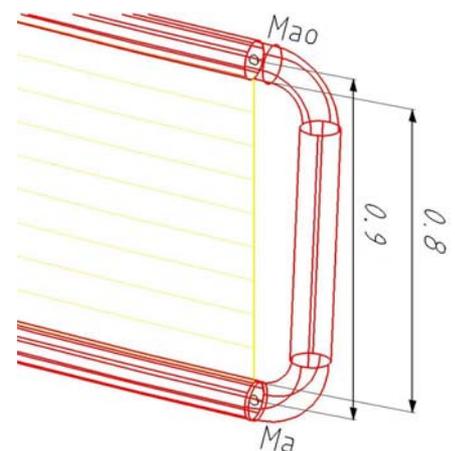


Abb.4.30: Gitterelemente

 „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b)

 „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a)

Stützen

Wir stellen die Stützen als Zylinder dar, die auf dem „idealisierten“ Gelände (Ebene $z=0$) beginnen. Abhängig von der Position ist die Höhe der Stützen unterschiedlich. Um diese Höhen snappen zu können, zeichnen wir als Erstes die Achsen der Zylinder. Mit Hilfe einer Schraublinie, auf der alle Achsenendpunkte liegen, kürzen

oder verlängern wir die Achsen auf die gewünschten Längen und zeichnen abschließend die Zylinder.

Wir beginnen mit den Stützen innerhalb der Fahrbahn. Da die Stützen 10 cm vom inneren Fahrbahnrand entfernt sind und ihre Radien 19 cm betragen, haben die untersten Punkte der Achsen eine r -Koordinate von $6 - (0,1 + 0,19) = 5,71$ m. Wir zeichnen einen Kreis zentriert im Ursprung mit Radius 5,71 m und platzieren die 6 Achsen in regelmäßigen Abständen, wobei eine auf der y -Achse liegt. Die Längen der Achsen wählen wir vorerst beliebig.

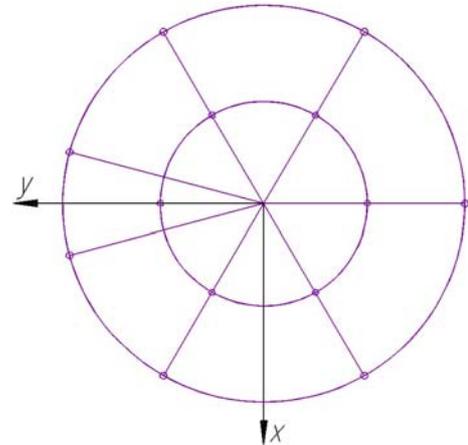


Abb.4.31

 „Kreis platzieren“ (Hauptpalette, 4b)

 „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b)

Die Schraublinie des Punktes $H_i = (5,71 / 20^\circ / 1,35)$ beschreibt eine Kurve, die 1,35 m höher als die Fahrbahn liegt und die alle Zylinderachsen schneidet. Diese eignet sich also um die Achsen der Zylinder auf die richtige Höhe zu verlängern oder zu verkürzen. Jede der Geraden, die eine Achse darstellt, muss so verändert werden, dass ihr Ende der Schnittpunkt mit der Schraublinie ist.

 „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a)

 „Element zum Schnittpunkt verlängern“ (Hauptpalette, 9b)

Bei den Stützen außerhalb gehen wir analog vor. Die r -Koordinate der Zylinderachse ergibt sich wiederum aus den Radien: $10,8 + 0,1 + 0,19 = 11,09$. Außerhalb des Fahrbahnrandes gibt es keine Stütze, deren Achse auf der y -Achse liegt ($\varphi = 90^\circ$), sondern eine mit $\varphi = 75^\circ$ und eine mit $\varphi = 105^\circ$. Der Hilfspunkt $H_a = (11,09 / 20^\circ / 1,35)$ erzeugt die Schraublinie durch die Endpunkte der Zylinderachsen.

Mit Hilfe der Achsen können die Zylinder nun schnell gezeichnet werden. Der Radius der Zylinder beträgt 19 cm.

 „Zylinder platzieren“ (3D-Haupt, 1a)

Realitätsnähe

Bis jetzt haben wir ein Flächenmodell der Radauffahrt gezeichnet. Bis auf das Gitter des Geländers, verdicken wir abschließend alles auf ein Volumen.

 „Auf Volumenelement verdicken“ (3D-Haupt, 1b)

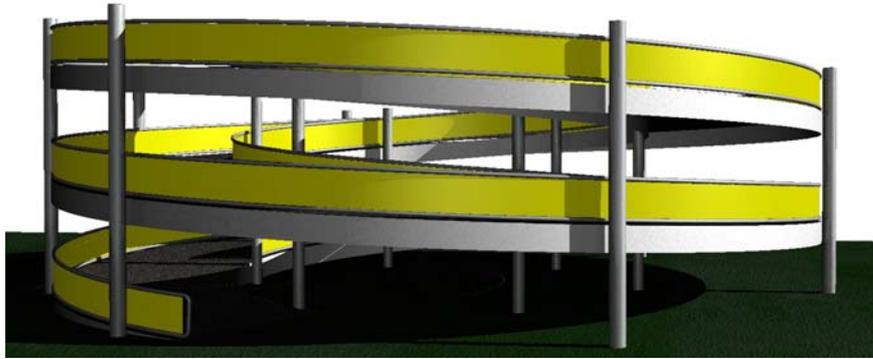


Abb.4.32

5 Diskussion von verschiedenen Werkzeugen

Die bis jetzt beschriebenen Beispiele wurden alle mit Hilfe des Werkzeugs für Schraubflächen erzeugt. Da das nicht die einzige Möglichkeit ist, Schraubflächen zu modellieren, möchte ich an dieser Stelle andere Werkzeuge unter die Lupe nehmen und diskutieren, welche Werkzeuge für verschiedene Aufgabenstellungen am besten geeignet sind.

Für das Konstruieren von Spiralfächen in MicroStation ist diese Diskussion von großem Interesse, weil kein eigenes Werkzeug dafür programmiert ist.

Schraub-, Helispiral- und Spiralfächen werden von CAD-Paketen durch B-Spline-Flächen angenähert. Abhängig vom Werkzeug, mit dem man die Fläche erzeugt, ist die Qualität der Approximation unterschiedlich.

Um Aussagen über die Werkzeuge und ihre Ergebnisse machen zu können, habe ich Flächen untersucht, die durch Geraden erzeugt werden und Flächen, deren Meridianschnitte Kreise sind. Vereinzelt habe ich noch andere Lagen von Kreisen verwendet, um Aussagen zu untermauern. Dennoch kann es sein, dass Werkzeuge, die bei diesen Profilen funktionierten, bei allgemeineren Kurven Fehler produzieren und vielleicht auch umgekehrt, dass Werkzeuge bei bestimmten Profilen besser funktionieren als bei den von mir untersuchten. Daher verstehe ich das Kapitel als eine Hilfe zur Auswahl von Werkzeugen und nicht als komplette Abhandlung.

Krümmungsanalyse

Um verschieden erzeugte Flächen zu vergleichen, lassen wir diese nach ihrer Flächenkrümmung analysieren.

Bei „Krümmung analysieren“ (Fläche modellieren, 2b ) wird die markierte Fläche nach der Gaußschen Krümmung codiert. Die Punkte mit der kleinsten Krümmung werden rot dargestellt, die mit der größten gelb. Die Bereiche dazwischen werden pink, blau, türkis und grün gefärbt.

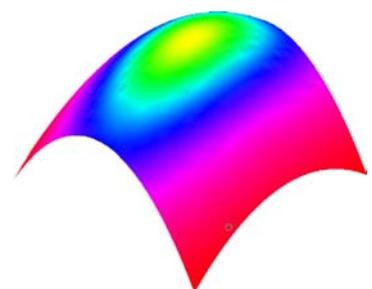


Abb.5.1: elliptisches Paraboloid

5.1 Schraubflächen

5.1.1 Werkzeug für Schraubflächen

Das Werkzeug „Schraubfläche konstruieren“ fordert vom Benutzer die interaktive Eingabe von Schraublinie, Profil

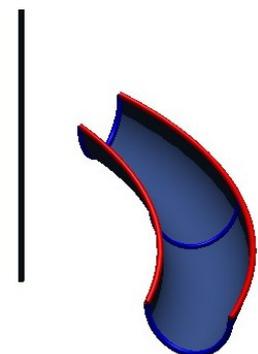


Abb.5.2

sowie Schraubachse. Hat man diese Angaben alle zur Verfügung, eignet sich dieses Werkzeug sicher am besten zum Erstellen einer Schraubfläche.

Das Werkzeug „Schraubfläche konstruieren“ fordert keine Angabe von Kontrollpunkten oder Toleranz womit die Qualität der Approximation gesteuert werden könnte. Ist jedoch die Schraublinie dargestellt durch eine B-Spline-Kurve mit großer Toleranz, wird auch die Fläche diese Genauigkeit nicht überbieten. Die Näherung der Fläche hängt aber nicht nur von der der Schraublinie ab, sondern auch von der erzeugenden Kurve. Hat diese ebenfalls keine exakte Darstellung, sondern ist auch sie durch eine B-Spline-Kurve angenähert (z.B. Ellipse), fließt noch eine weitere Abweichung von der tatsächlichen Fläche ein.

In der Abbildung 5.3 sieht man die Krümmungsanalyse von zwei Schraubflächen. Beide sind mit dem Werkzeug „Schraubflächen konstruieren“ erstellt worden. Speziell bei der Regelschraubfläche (Wendelfläche) ist einfach zu sehen, dass die von MicroStation produzierte Näherung der Fläche durch eine B-Spline-Fläche gut ist, da die Gaußsche Krümmung entlang einer Schraublinie konstant ist. Betrachtet man die Schraublinien von außen nach innen, nimmt die Krümmung kontinuierlich zu. Aber auch bei der Kreisschraubfläche sind die Streifen entlang der Schraublinien schön zu erkennen.

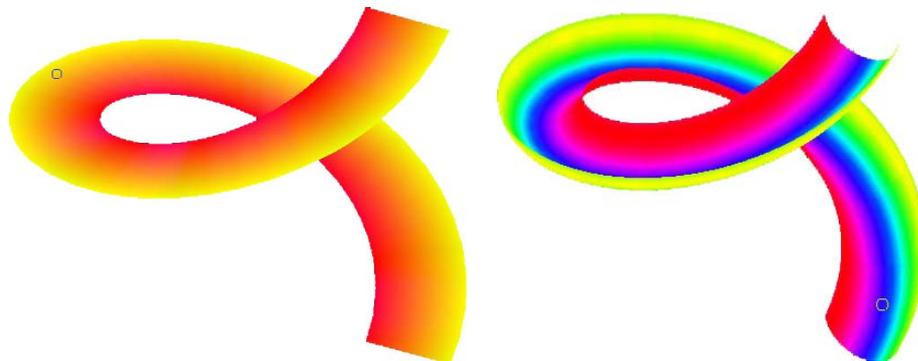


Abb.5.3: Krümmungsplot einer Wendel- bzw. Kreisschraubfläche

Variationen

Mit der Funktion „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a ) kann man noch zwei Abwandlungen von Schraubflächen modellieren:

1. Man kann das Profil während des Verschraubens skalieren. Will man die Profilkurve in Richtung des Radius skalieren, legt man das mit Hilfe „Maßstab des Abschnittes in X-Richtung“ fest. Der Maßstab in Y-Richtung skaliert in Richtung der Höhe. Multipliziert man den Radius bzw. die Höhe mit dem jeweiligen Faktor, so erhält man die Längen der Endlage des Profils. Dazwischen wird ein stetiger Übergang von der Ausgangslage zur Endlage erstellt.



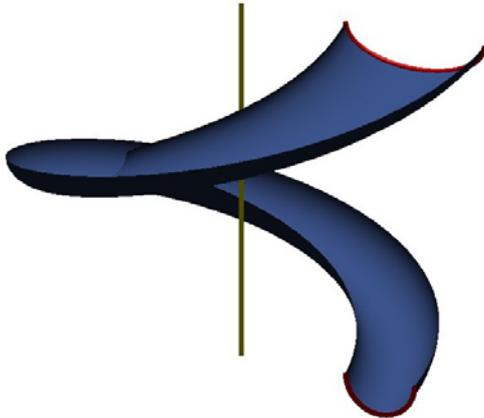


Abb.5.4.: Radius skalieren
Maßstab des Abschnitts in X-Richtung: 2

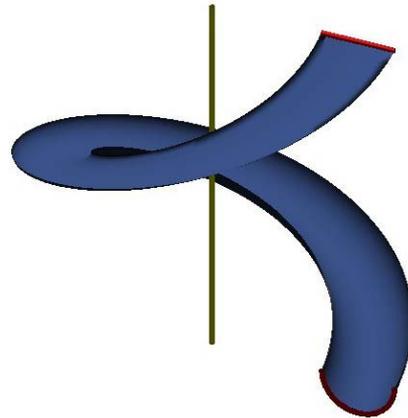


Abb.5.5: Höhe skalieren
Maßstab des Abschnitts in Y-Richtung: 0

2. Mit **Drehwinkel** kann man bestimmen wie die Profilkurve zusätzlich zur Schraubung noch gedreht werden soll. Da die Schraubung durch eine Schraublinie festgelegt wird, ist auch die Drehung anhand der Schraublinie definiert. Für verschiedene Lagen von Profilkurven, werden folgende Drehungen durchgeführt:

- Die Profilkurve liegt in einer Querschnittsebene: Die Kurve wird um den Radius der Schraublinie gedreht.
- Die Profilkurve liegt in einer Meridianebene: Die Kurve wird um die Normale des Radius, die in einer Normalebene der Achse liegt, gedreht.

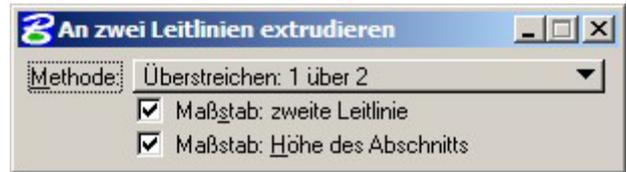
Bemerkung: MicroStation akzeptiert als Pfad nicht nur eine Schraublinie, sondern auch Kreis(bögen), alle Kegelschnitte, ebene wie räumliche B-Spline-Kurven.

5.1.2 An zwei Linien extrudieren

Mit „An zwei Linien extrudieren“ wird eine B-Spline-Fläche durch die Angabe von zwei Leitkurven und einer bzw. zwei Profilkurven, die die Anfangspunkte und im zweiten Fall auch die Endpunkte der Leitlinien verbinden, festgelegt. Die Zwischenlagen der Profilkurve werden bei der Angabe von nur einer Profilkurve durch die Leitlinien festgelegt. Die Punkte des Profils, die auf den Leitlinien liegen, durchlaufen die Kurven und dabei bleibt der Winkel zwischen der ersten Leitkurve und dem Profil gleich. Bei der Angabe zweier Profilkurven wird ein gleichmäßiger Übergang zwischen den beiden Profilkurven erstellt.

Um eine Schraubfläche durch Extrudieren an zwei Leitlinien zu erstellen, genügt es die beiden Randschraublinien der Fläche und eine Profilkurve anzugeben. Die Eigenschaft, dass der Winkel zwischen Leitlinie und Profil konstant bleibt, gewährleistet, dass das Profil nicht nur parallel verschoben wird, sondern auch gedreht wird.

„An zwei Leitlinien extrudieren“ ist in der Toolbox „Fläche modellieren“ (1a ). Unter „Methode“ können wir zwischen „Überstreichen: 1 über 2“ und „Überstreichen: 2 über 2“ auswählen. Wählt man die erste Möglichkeit, muss man nacheinander zwei Leitlinien und eine Profilkurve anklicken und das Ergebnis anschließend annehmen oder ablehnen. Um unerklärliche Ergebnisse zu vermeiden, ist es sinnvoll, dass die Anfangspunkte der Leitlinien auf der Profilkurve liegen.



Die weiteren Einstellungen „Maßstab zweite Linie“ und „Maßstab Höhe“ kann man für das Konstruieren von Schraubflächen mit Schraublinien als Leitlinien außer Acht lassen. Mit diesen Einstellungen kann man Variationen der Fläche konstruieren:

Wenn „Maßstab zweite Linie“ aktiviert ist, wird die Profilkurve, die entlang der ersten Kurve verschoben wird und deren Lage durch die zweite bestimmt wird, zusätzlich so skaliert, dass die Fläche genau zwischen erster und zweiter Leitlinie verläuft. Da bei Schraubflächen die Leitlinien Bahnkurven von Punkten des Profils sind und das Profil im Allgemeinen nicht verändert wird, ist die Einstellung für Schraubflächen nicht von Bedeutung.

„Maßstab Höhe“ kann nur ausgewählt werden, wenn auch „Maßstab zweite Linie“ angeklickt ist. Das bewirkt, dass die Höhe im selben Verhältnis gestreckt oder gestaucht wird, wie die Länge des Profils.

Bei der Methode „Überstreichen: 2 über 2“ muss man zwei Leitlinien und zwei Profilkurven am Anfang und Ende der Leitlinien nacheinander anklicken und das Ergebnis bestätigen.

Genauigkeit

Die Approximation der Fläche hängt von der Toleranz der Schraublinien ab und davon, ob die Profilkurve eine exakte oder eine angenäherte Kurve ist.

Die mit „Überstreichen 1 über 2“ konstruierte Näherung einer Meridiankreisschraubfläche hat ein Krümmungsverhalten, das sehr an das einer Schraubfläche erinnert, allerdings liegen die Schraublinien nicht mehr auf der Fläche.

Bei einer Regelschraubfläche muss man eine Gerade entlang von zwei Schraublinien laufen lassen. Das Ergebnis ist eine gute Approximation für Regelschraubflächen, die Krümmung ist aber nicht so gut, wie bei der Konstruktion mit „Schraubfläche konstruieren“.

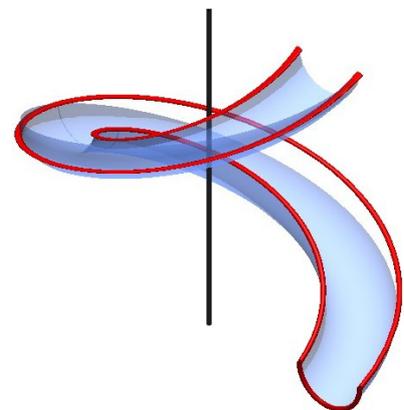


Abb.5.6: rote Elemente wurden angeklickt

Man kann die Rolle von Leitkurve und Profilkurve nicht vertauschen – das würde bedeuten, dass man zwei Halbkreise angibt, entlang derer eine Schraublinie verschoben wird - weil die Schraublinien auf einer Fläche nicht kongruent sind. Der Ausnahmefall ist die Schichtenkreisschraubfläche. Versucht man diese mit Hilfe des Werkzeugs zu erstellen, wird klar wie die Funktion arbeitet. Beim Extrudieren am untersten und obersten Kreis entsteht eine Fläche, auf der lauter kongruente Schraublinien liegen. Da allerdings der Winkel zwischen Kreistangente und Schraubtangente in den gemeinsamen Punkten konstant bleibt, entsteht eine Drehfläche.

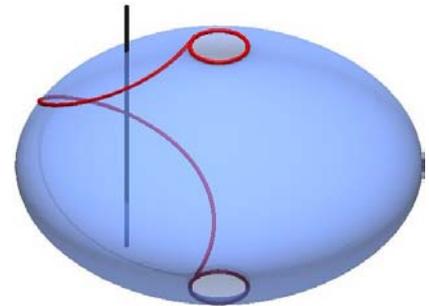


Abb.5.7

Für eine Schraubfläche muss entlang einer Schraublinie der Winkel zwischen jeder Schraubtangente und der erzeugenden Kurve in jedem Punkt konstant sein. Daher wäre die Funktion geeignet für Schraubflächen, wenn man Schraublinien als Leitkurven verwendet, allerdings scheitert es an der Genauigkeit.

5.1.3 Über Netz konstruieren

Auf einer Schraubfläche liegen zwei Kurvenscharen: Einerseits die verschiedenen Lagen der erzeugenden Kurve unter der Schraubung und andererseits die Bahnkurven aller Punkte der Erzeugenden. Diese beiden Kurvenscharen überspannen die Fläche wie ein Netz. Wir bezeichnen die beiden Kurvenscharen als u - und v -Linien, wobei es an sich keine Bedeutung hat, welche Schar welchen Namen trägt. Im Folgenden werden wir aber stets die Profilkurven als u -Linien und die Schraublinien als v -Linien bezeichnen. Über die Ordnungen der u - und v -Linien sei noch erwähnt, dass der Begriff „Ordnung“ in MicroStation für „mathematische Ordnung + 1“ steht.

Jede Fläche kann durch die Angabe von u - und v -Linien durch einen B-Spline-Fläche angenähert werden. Punkte der Fläche, die weder einer u - noch einer v -Linie angehören, werden mit Hilfe des Netzes interpoliert. Daher gilt: Je mehr Kurven angegeben werden, desto geringer ist die Abweichung von der eigentlichen Fläche. Da aber auch die u - und v -Linien angenäherte B-Spline-Kurven sein können, ist auch deren Abweichung von den dargestellten Kurven für die Genauigkeit der Fläche entscheidend.

Das Werkzeug „über Netz konstruieren“ legt eine B-Spline-Fläche über ein Netz. Wir erstellen mit diesem Werkzeug eine Schraubfläche durch die Angaben von verschiedenen Lagen des Profils unter der Schraubung (u -Linien) und Bahnschraublinien der Profilkurve (v -Linien).

Wichtig für die Konstruktion ist, dass jedes Element in u -Richtung alle in v -Richtung schneidet. Außerdem muss jede der beiden Scharen durch mindestens 2 Kurven angegeben werden.

In MicroStation findet man die Funktion „Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren“ in der Toolbox „Fläche modellieren“ (1a ). Wir wollen die Fläche als Netz definieren und stellen das im Funktionskasten ein. Wir beginnen mit einer Schar (u -Linien) und klicken diese in der Reihenfolge wie sie auf der Fläche liegen an. Hat man alle verfügbaren Kurven angeklickt, klickt man mit der linken Tasten irgendwo hin, um MicroStation mitzuteilen, dass die Eingabe der u -Linien beendet ist. Nun klicken wir die Kurven der anderen Schar nacheinander an und beenden den Vorgang wiederum mit der linken Taste.

Um Probleme zu vermeiden, ist es notwendig, alle Schraublinien und Lagen der Profilkurve gleich zu orientieren und die eine Schar der Richtung der andern entsprechend anzuklicken und umgekehrt.

 „Elementrichtung ändern“ (B-Spline-Kurven, 1b)

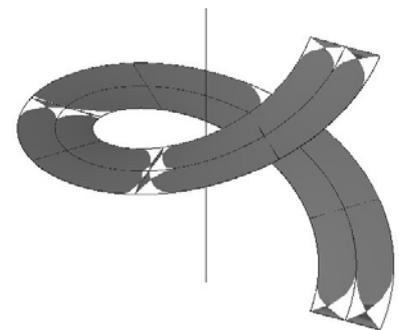


Abb.5.8: Fehler durch unterschiedliche Richtungen der Erzeugenden

Genauigkeit

Erstellt man die Wendelfläche mit dem Werkzeug „über Netz konstruieren“ erhält man genau das gleiche Bild für die Krümmungsanalyse wie mit „Schraubfläche konstruieren“. Für Wendelflächen bzw. alle Regelschraubflächen scheint daher das Werkzeug geeignet zu sein und auch die Konstruktion ist kein großer Aufwand: Man muss nur die Bahnkurven des äußersten und innersten Punkt des Profils kennen und die Ausgangs- und Endlage der Profilkurve. Durch Zwischenlagen der Profilkurve verschlechtert man die Näherung wider Erwarten.

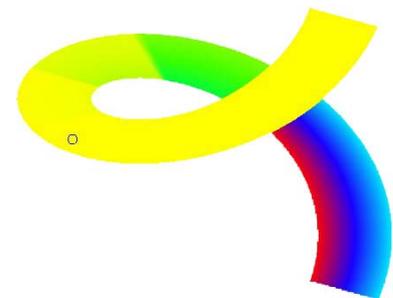


Abb.5.9: Geraden als u -Linien mit mehreren Zwischenlagen

Für Meridiankreisschraubflächen hingegen erhöht man die Qualität durch ein feineres Netz. Klickt man wie bei der Regelschraubfläche nur je zwei Kurven pro Schar an, erhält man eine Fläche, deren Meridianschnitt wieder ein (angenäherter) Kreis sein sollte, aber wie in der Abbildung 5.10 sichtbar eine B-Spline-Kurve ist, die sich deutlich von einem Kreis unterscheidet.

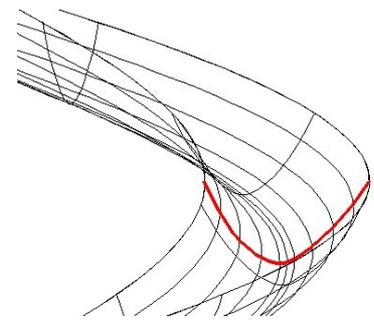


Abb.5.10

Verfeinert man das Netz, indem man zusätzlich zwei Zwischenlagen des Kreises verwendet, weiter aber nur zwei Schraublinien anklickt, verbessert sich der

Meridianschnitt sehr. Die Krümmungsanalyse zeigt aber, dass die Fläche im Vergleich zur Erzeugung mit „Schraubfläche konstruieren“ dennoch keine gute Näherung ist.

Klickt man mehrere Schraublinien an und die Anfangs- und Endlage des Kreises, wird die Fläche oft nur über die ersten angeklickten Schraublinien gespannt.

Verdichtet man beide Kurvenscharen, wird die Fläche (meistens) schön, die Krümmungen bleiben dennoch ungenau.

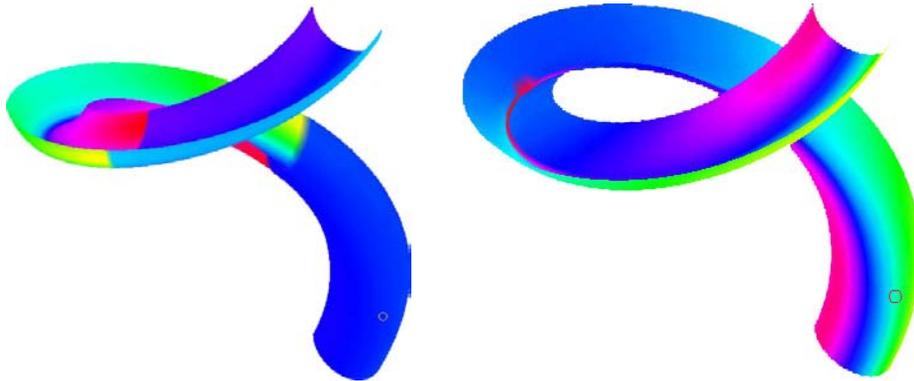


Abb.5.11: 2 Schraublinien und 4 Kreise Abb.5.12: mehrere Schraublinien und Kreise

5.1.4 Über Schnitt konstruieren

Ein weiteres Werkzeug zum Modellieren von Flächen mit CAD-Paketen funktioniert über die Angabe von verschiedenen (Schnitt-)Kurven der Fläche. Vergleicht man es mit „über Netz konstruieren“, genügt es eine der beiden Kurvenscharen auszuwählen und nacheinander anzuklicken (u -Linien). Die u -Linien der Fläche werden von MicroStation durch B-Spline-Kurve 3. Ordnung angenähert. Die Ordnung der B-Spline-Fläche in v -Richtung wird durch die Abschnittskurven bestimmt. Daher ist im Allgemeinen für eine gute Approximation die Angabe vieler u -Linien unumgebar.

Das Werkzeug „Fläche über Schnitt konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a ) wird im Beispiel „Horn einer Hirschziegenantilope“ (Kapitel 6.1) genauer beschrieben.

Genauigkeit

Gibt man für eine Meridiankreisschraubfläche fünf Schraublinien an, scheint die Näherung bereits gut zu sein. Entscheidend für das gute Ergebnis ist, dass die Anfangspunkte der Schraublinien am Kreis regelmäßig verteilt sind. Die Krümmungsanalyse relativiert jedoch das Ergebnis, weil die Fläche fast konstante Krümmung hat, was nicht stimmen kann.

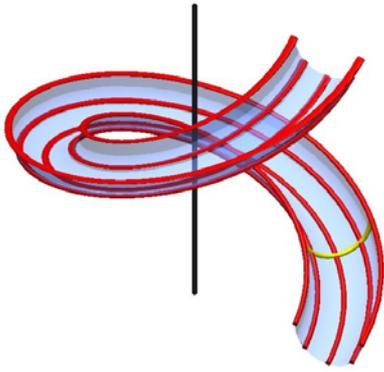


Abb.5.13: rote Schraublinien wurden angeklickt – gelbe Kurve ist ein Meridianschnitt, der sich nur gering von Kreis unterscheidet.

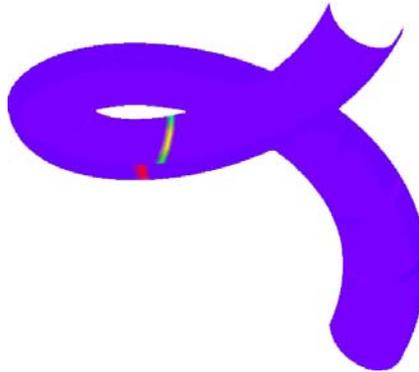


Abb.5.14: Krümmungsanalyse vom linken Bild

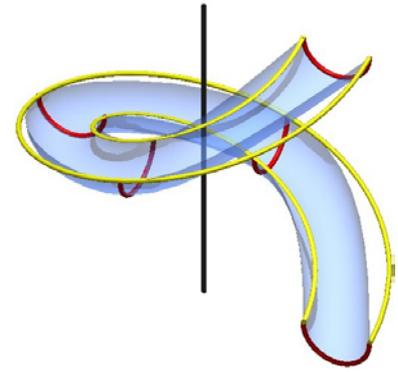


Abb.5.15: rote Kreise wurden angeklickt – gelbe Schraublinien sollten auch auf der Fläche liegen.

Die Abbildung 5.15 zeigt die Meridiankreisschraubfläche, die durch fünf rote Kreise erzeugt wurde. Die gelben Schraublinien sollten die Randschraublinien der Fläche sein. Dass die Fläche, die über die Schraublinien festgelegt wurde, eine bessere Approximation der Schraubfläche ist, überrascht nicht, wenn man bedenkt, dass die u -Linien als B-Spline-Kurven 3.Ordnung gezeichnet werden. Ein Halbkreis kann durch fünf Punkte mit einer Kurve 3.Ordnung einigermaßen gut angenähert werden, aber für eine Schraublinie reichen fünf Punkte nicht aus.

Aus demselben Grund erhält man ein ähnlich schlechtes Ergebnis, wenn man fünf Erzeugende einer Regelschraubfläche angibt. Ebenfalls sollten die gelben Elemente auf der Fläche liegen. Erstellt man eine Regelschraubfläche durch die Bahnkurven ihrer Profilkurve, genügt die Vorgabe der innersten und äußersten Schraublinie um eine gleich gute Näherung wie mit dem Werkzeug „Schraubflächen konstruieren“ zu erhalten.

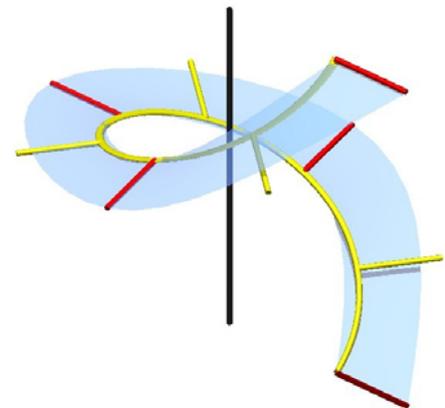


Abb.5.16: die roten Erzeugenden wurden angeklickt – die gelben Elemente sollten auch auf der Fläche liegen

5.1.5 Freiformfläche

Das Konstruieren einer Freiformfläche basiert wiederum auf den u - und v -Linien. Die zwei Kurvenscharen werden durch B-Spline-Kurven angenähert. Dazu klickt man Punkte oder Kontrollpunkte der Fläche an. Die Ordnung der B-Spline-Kurve kann in beiden Richtungen gewählt werden, allerdings muss die Anzahl der Punkte größer als die mathematische Ordnung sein.

Seien die v -Linien der Schraubfläche wiederum die Bahnschraublinien von Punkten des Profils. Um eine gute Näherung durch eine konstruierte B-Spline-Kurve zu

erhalten, sollte man die Ordnung der B-Spline-Kurve hoch wählen und viele Punkte angeben. Was die Lagen der Profilkurven angeht, hängen Ordnung und Anzahl der Punkte von der Kurve ab. Das erfordert einen großen Aufwand bei der Konstruktion von Punkten bzw. Kontrollpunkten zur Festlegung der Fläche. Alle Punkte der Fläche anzuklicken, braucht auch einiges an Zeit und Geduld.

Kann ein CAD-Paket nur B-Spline-Flächen durch Punkte legen, lässt sich damit eine akzeptable Schraubfläche modellieren. Sollten aber andere Werkzeuge programmiert sein, sind diese vorzuziehen.

Da „Freiformfläche platzieren“ (Fläche modellieren, 1a ) in diesem Kontext für die Konstruktion einer Schraubfläche betrachtet wird, beschreibe ich diese Funktion nicht in allen Details, sondern beschränke mich auf die wesentlichen Schritte für das Modellieren einer Schraubfläche.

Freiformflächen werden oft über Kontrollpunkte angegeben. Da wir diese aber nur für die Annäherung einer Schraubfläche verwenden, kennen wir kein Kontrollnetz und wählen daher die Methode „Durch Punkte“.



„Definieren über: Platzierung“ bedeutet, dass man die Punkte einzeln anklickt, im Gegensatz zu „Konstruktion“, wo man ganze Polygonzüge auswählt. Ob es von Vorteil ist Polygonzüge durch die Punkte der u-Linien und der v-Linien zu zeichnen, um diese anzuklicken oder direkt die Punkte anzuklicken, bleibt dahingestellt.

Die Schraublinien (v-Linien) sind offene Kurven und werden daher auch durch offene Kurven angenähert. Um ihrer Form möglichst gerecht zu werden, wählen wir eine hohe Ordnung (Der maximale Wert für das Feld ist 15). Flächen mit hoher Ordnung neigen allerdings am unteren und oberen Ende der Fläche zum Oszillieren. Wählt man die MicroStation Ordnung ≤ 8 erhält man ein gutes Ergebnis. Die u-Linien können offen oder geschlossen sein und ihre Ordnung hängt stark von der Profilkurve ab. Handelt es sich zum Beispiel um eine Regelschraubfläche, genügt MicroStation Ordnung 2.

Wir beginnen mit der ersten u-Linie und snappen mindestens gleich viele Punkte wie wir für die Ordnung (im Sinn von MicroStation) angegeben haben, in der Reihenfolge wie sie verbunden werden sollen. Wir beenden den Vorgang mit der rechten Maustaste. Alle u-Linien müssen mit dieser Anzahl von Punkten angegeben werden. Nun klicken wir von der nächsten u-Linie die Punkte in derselben Reihenfolge an, wie schon bei der ersten. Wenn man mit der v-Linie fertig ist, beginnt man direkt mit der nächsten ohne die rechte Maustaste zu betätigen,

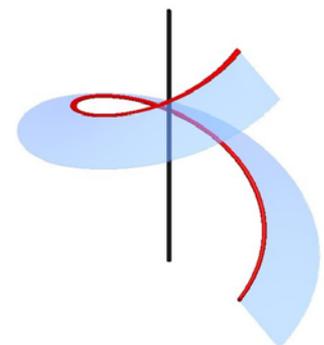


Abb.5.17: schiefe geschlossene Regelschraubfläche

da MicroStation durch die Anzahl der angeklickten Punkte weiß, wann die nächste v-Linie eingegeben wird. Es müssen mindestens so viele u-Linien angeklickt werden, wie die MicroStation Ordnung der v-Linien ist. MicroStation legt um die v-Linien zu erhalten, eine B-Spline-Kurve durch alle ersten Punkte der u-Linien, durch alle zweiten Punkte,... usw.

5.1.6 Schlussbemerkung

Ich habe versucht die wichtigsten Werkzeuge herauszugreifen und jene vernachlässigt, die ähnlich wie die beschriebenen arbeiten bzw. ähnlich schlechte Ergebnisse liefern.

Das Werkzeug für Schraubflächen ist im Vergleich zu den anderen für die Konstruktion von Schraubflächen eindeutig am besten. Lediglich bei Regelschraubflächen liefern auch die anderen gute Ergebnisse.

5.2 Spiral- und Helispiralflächen

5.2.1 Werkzeug für Schraubflächen

Dieses Werkzeug ist nicht ausschließlich für Schraubflächen programmiert, sondern erlaubt uns für den Pfad jede beliebige Kurve und damit auch eine zylindro-konische Spirale bzw. eine Helispirale anzugeben. Beide Kurven besitzen eine Achse, die gleichzeitig Achse der gesuchten Fläche ist, welche für die Konstruktion der Fläche notwendig ist. Auch kann die Skalierung des Profils beim Überstreichen des Pfades durch die Maßstäbe in x - und y -Richtung erzeugt werden. Um eine Spiral- bzw. Helispiralfläche zu erzeugen, kann der Maßstab nicht beliebig gewählt werden, sondern muss dem (Heli-)Spiralparameter entsprechen. Beide Maßstäbe müssen identisch gewählt werden, um das Profil proportional zu strecken oder zu stauchen.

Spiralflächen

Als Erstes befassen wir uns mit der Konstruktion von Spiralflächen mit der Funktion „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a ).

Die erste Spiralfläche entsteht durch einen Halbkreis in einer Meridianebene. Die zylindro-konische Spirale, die die Spirallung festlegt, endet im Spiralzentrum. Der Endradius der zylindro-konischen Spirale muss also gleich Null sein. Daher muss das Profil in Richtung des Radius (x -Richtung) und in Richtung der Höhe (y -Richtung) auf Null skaliert werden. Wie in der Abbildung 5.18 erkennbar, sind die Meridianschnitte der Fläche Kreise bzw. sehr gute Näherungen von Kreisen. Zu überprüfen bleibt noch, ob die verschiedenen Lagen der Kreise durch die Spirallung ineinander übergeführt werden. Dazu folgende Tabelle:

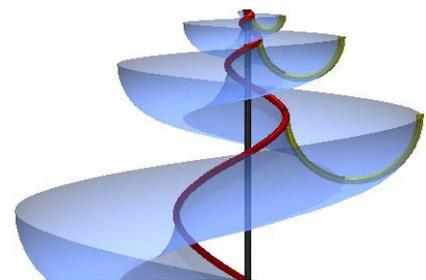


Abb.5.18: gelbe Querschnitte sind Kreise

Querschnitte von oben nach unten nummeriert	„Radius“	„Soll-Radius“
1	0,3106	
2	0,8106	$r_2 = r_1 \cdot e^{0,2 \cdot 2\pi} = 1,0913$
3	1,311	$r_3 = r_2 \cdot e^{0,2 \cdot 2\pi} = 2,8481$

In der Spalte „Radius“ sind gemessene Größen eingetragen.

In der Spalte „Soll-Radius“ berechnen wir aus dem ersten gemessenen Radius den zweiten, usw.

Vergleicht man die erste und zweite Spalte, wird deutlich, dass die Skalierung dieses Werkzeuges nicht unseren Anforderungen gerecht wird. Auf Grund dieses Ergebnisses ist es nicht mehr notwendig andere Spiralflächen zu untersuchen.

Helispiralflächen

Um festzustellen ob das Werkzeug „Schraubfläche konstruieren“ für Helispiralen geeignet ist, betrachten wir die gemessenen Radien in der Tabelle. Die Differenzen $r_2 - r_1$ und $r_3 - r_2$ ergeben auf drei Nachkommastellen gerechnet dasselbe Ergebnis 0,5. Diese Eigenschaft entspricht einer linearen Skalierung, womit das Werkzeug „Schraubfläche konstruieren“ für Helispiralen scheinbar geeignet ist. Das kontrollieren wir an konkreten Beispielen:

Ein Kreis in einer Meridianebene ist das Profil der ersten Helispiralfläche. Weiters wählen wir – wie schon bei der zylindronischen Spirale - eine Helispirale, deren Endradius Null ist. Es gilt wiederum, dass das Profil in Richtung des Radius (x -Richtung) und in Richtung der Höhe (y -Richtung) auf Null skaliert werden muss. Das Bild zeigt, dass das Profil nicht unseren Erwartungen gemäß skaliert wurde: Die Meridianschnitte der Fläche (in Abb.5.19 u. 20 ausgefüllt dargestellt) müssten alle Kreise sein und speziell der obere ist stark verzehrt. Das müsste auch gelten, wenn der obere Radius der Helispirale verschieden von Null ist. In diesen Fällen ist die Abweichung vom Kreis geringer, aber trotzdem zu groß, um das Werkzeug zu verwenden.

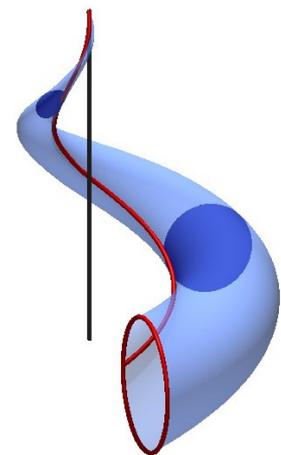


Abb.5.19

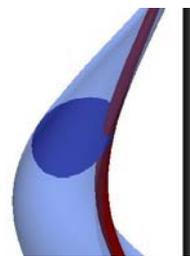


Abb.5.20: Aufriss des oberen Meridianschnitts

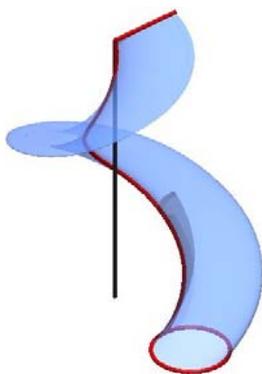


Abb.5.21: Profil ist ein Kreis in einer Normalebene der Achse

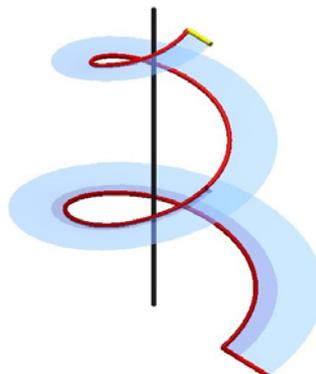


Abb.5.22: Profil ist eine Gerade normal zur Achse

Wählt man als Profil einen Kreis in einer Normalebene der Achse, kann die Skalierung in y -Richtung außer Acht gelassen werden. Da aber nur in Richtung des Radius skaliert wird, ist die Endlage des Profils eine Gerade.

Nur bei der Konstruktion von geraden geschlossenen Helispiralflächen scheint das Werkzeug das Gewünschte zu erzeugen. Selbst bei den anderen Regelhelispiralflächen versagt das Werkzeug.

5.2.2 Über Schnitt konstruieren

Aus der vorangegangenen Diskussion der Werkzeuge für Schraubflächen wissen wir, dass wir die besseren Ergebnisse erhalten, wenn wir die Fläche durch Bahnkurven und nicht erzeugende Kurven festlegen.

Dazu müssen wir geeignete Helispiralen/Spiralen konstruieren (v -Linien). Im Fall der Helispiralung ist das nicht weiter ein Problem, jedoch ist der Aufwand für mehrere zylindro-konische Spiralen groß. Im Allgemeinen ist die Qualität der Ergebnisse sehr gut. In manchen Fällen (z.B.: kleiner Spiralparameter) entstehen große Rechenfehler.

Sei das Profil für eine Helispiral- bzw. Spiralfäche ein Halbkreis (blau) in einer Meridianebene. Wenn man fünf Bahnkurven (rot) vorgibt, liegen diese, sowie die Profilkurven am Anfang und Ende der Fläche, schön auf der Fläche. Weiters spricht für die Ergebnisse, dass die gelben Meridianschnitte jeweils Kreise sind. Die Krümmungsanalysen zeigen Schwächen auf.

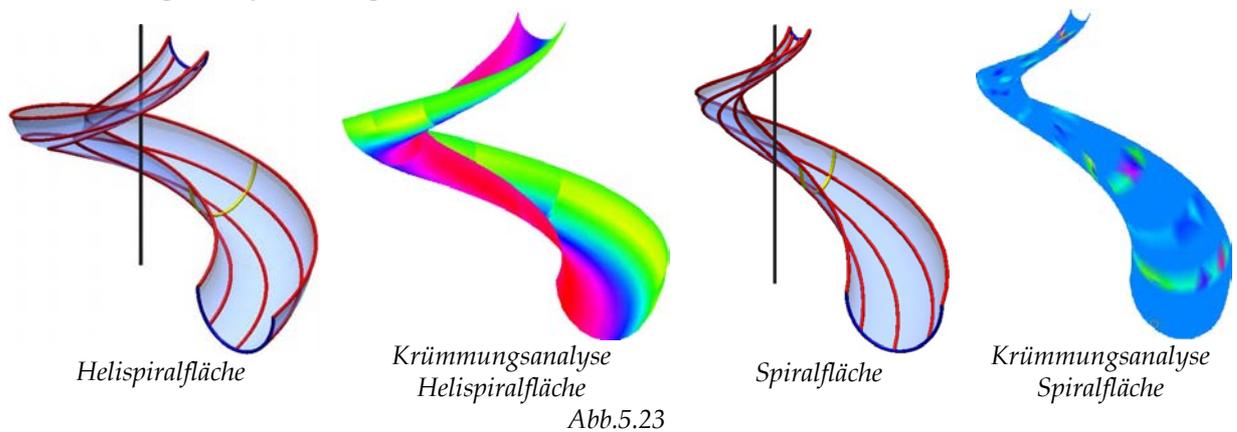


Abb.5.23

Das Werkzeug funktioniert auch, wenn der Profilkreis in einer Querschnittsebene liegt. Die Angabe von fünf Bahnkurven für einen Halbkreis ist wieder sinnvoll um ein gutes Ergebnis zu erhalten. Nimmt man einen vollen Kreis sind mindestens acht (Heli-)Spiralen notwendig und da es sich um eine geschlossene Profilkurve handelt, muss man die erste angeklickte Kurve zum Schluss noch einmal auswählen.

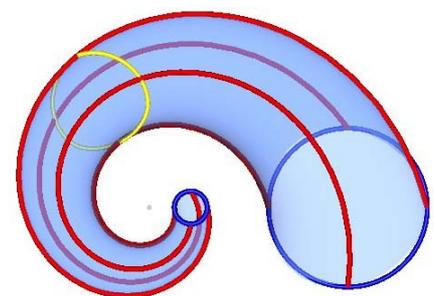


Abb.5.24: Grundriss einer Spiralfäche durch nur vier zylindro-konische Spiralen

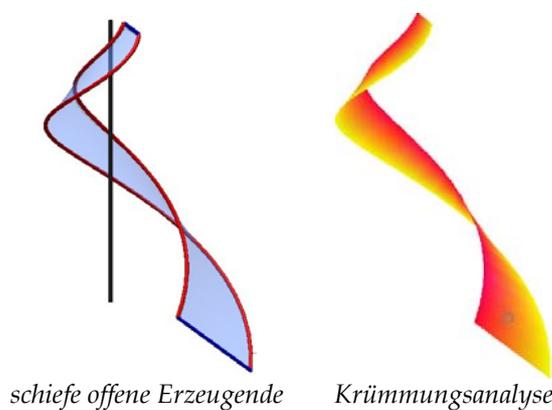


Abb.5.25

In der Abbildung 5.25 wurden nur vier zylindro-konische Spiralen angegeben um die Fläche zu erstellen. Betrachtet man den gelben Querschnitt sieht man, dass es kein Kreis ist und damit die Fläche eine schlechte Näherung ist.

Verwendet man als Erzeugende eine Gerade, so ist bei jeder Lage zur Achse das Ergebnis gut und die Krümmungsanalyse entspricht den Erwartungen. Es treten auch keine sichtbaren Fehler dabei auf.

5.2.3 Über Netz konstruieren

Betrachtet man dieses Werkzeug als eine Verbesserung des Werkzeugs „Über Schnitt konstruieren“, indem man noch eine zweite Kurvenschar der Fläche (u - und v -Linien) angibt, so überrascht es nicht, dass das Ergebnis für eine Regelhelicoidal- und Regelspiralfläche gut ist. Neben den Rand(heli-)spiralen müssen nur noch Erzeugende am Anfang und am Ende der Fläche angeklickt werden, um die Fläche berechnen zu lassen.

Prinzipiell ist das Werkzeug für allgemeine aber auch schon für Kreis(heli-)spiralfächen vom Arbeitsaufwand her zu meiden, da bereits die Konstruktion von Bahnspiralen viel Zeit benötigt und dazu noch Lagen von Erzeugenden konstruiert werden müssen. Außer bei den Regel(heli-)spiralfächen müssen mehr als zwei Helicoiden bzw. Spiralen vorgegeben werden.

Verwendet man für eine Helicoidalfläche zum Beispiel fünf Helicoiden und zwei Profilhalkreise, die in einer Meridianebene liegen, entsteht eine Fläche, bei der jeder andere Meridianschnitt keine Kreisform hat. Bezieht man drei oder mehr als drei Profilkurven ein, sind die Meridianschnitte in Ordnung.

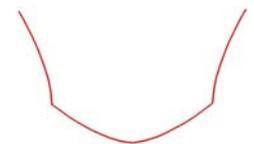


Abb.5.26:
Meridianschnitt

Für das Werkzeug ist wichtig, dass jede u -Linie alle v -Linien schneidet. Da die Netzkurven durch B-Spline-Kurven angenähert werden, schneiden sich manche Kurven nicht, weswegen oft Fehler auftreten.

Für Spiralfächen gilt analoges. Um falsche Ergebnisse zu vermeiden, ist es sinnvoll, die zylindro-konischen Spiralen neu zu erstellen, das heißt sie durch B-Spline-Kurven zu ersetzen, die die zylindro-konischen Spiralen mit einer vorgegebenen Genauigkeit (Toleranz) annähern. Speziell bei zylindro-konischen Spiralen mit großem Spiralparameter kommt es oft zu Fehlern, die sich durch diesen zusätzlichen Konstruktionsschritt vermeiden lassen.

5.2.4 An zwei Linien extrudieren

Das Werkzeug eignet sich - wie schon die vorangegangenen - sehr gut für Flächen, deren Erzeugende Geraden sind. Beide Methoden „Überstreichen: 1 über 2“ mit den zwei Optionen angeklickt und „Überstreichen: 2 über 2“ funktionieren.

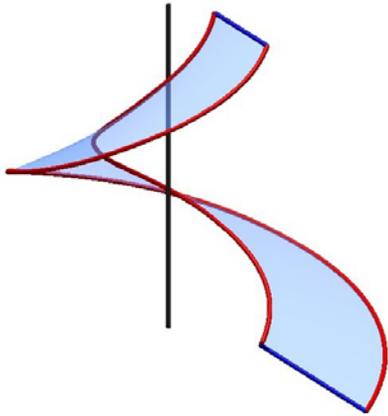


Abb.5.27: Regelhelispiralfläche erzeugt mit Methode „Überstreichen: 2 über 2“

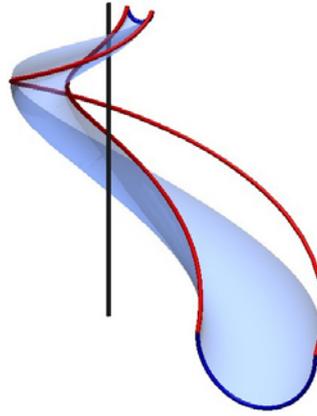


Abb.5.28: Spiralfläche erzeugt mit Methode „Überstreichen: 1 über 2“

Nimmt man als Profilkurve wiederum einen Kreis, liefern die beiden Methoden für Helispiralflächen und Spiralfächen Ergebnisse, die sich von den vorgegebenen Kurven abheben.

5.2.5 Schlussbemerkung

Von den beschriebenen Werkzeugen scheint trotz mancher Fehler „über Schnitt konstruieren“ das beste Werkzeug für Helispiral- und Spiralfächen zu sein. „Über Netz konstruieren“ bringt ebenfalls gute Ergebnisse, ist aber aufwändiger.

6 Beispiele für Spiralflächen

Spiral- und Helispiralflächen finden in der Technik kaum Anwendung, in der Natur hingegen kommen sie oft vor: Schneckenhäuser, Muscheln, Hörner, ...

Durch unterschiedliche Wachstumsprozesse entstehen Spiralflächen oder Helispiralflächen. Aus Kapitel 2.1 über Spiralflächen wissen wir, dass in der analytischen Darstellung der Spiralung der exponentielle Faktor $e^{p\sigma}$ die Streckung zum jeweiligen Drehwinkel σ erzeugt. Die Exponentialfunktion wird häufig zum Beschreiben von Wachstumsprozessen verwendet. Charakteristisch für exponentielles Wachstum ist, dass das Objekt in gleichen Zeitintervallen immer um einen konstanten Faktor wächst.¹¹

Bei Helispiralflächen gehört zum Drehwinkel σ der Streckfaktor $p\sigma$. Durch $p\sigma$ nimmt ein Objekt im Wachstumsprozess in gleichlangen Zeitintervallen um einen konstanten Summanden zu. Das ist für den Beginn des Wachstums ein großer Schub, allerdings bewirkt dieser Summand nicht mehr viel, wenn das Objekt eine gewisse Größe erreicht hat. Die Natur bietet auch eine Vielzahl von Beispielen, bei denen ein sehr starkes Wachstum am Anfang notwendig ist, um eine bestimmte Größe und Form zu erhalten.

Wie im Kapitel über die Werkzeuge bereits festgestellt, eignet sich das Werkzeug „über Schnitt konstruieren“ am besten zur Erzeugung von Helispiral- und Spiralflächen. Dafür müssen wir mehrere Bahnkurven der jeweiligen Spiralung zeichnen. Weil Helispiralen weniger Konstruktionsschritte erfordern, beginne ich mit der Helispiralung.

6.1 Helispiralflächen

Beispiel: Horn einer Hirschziegenantilope

Die Hirschziegenantilope besitzt zwei Hörner, die durch eine Spiegelung aufeinander abgebildet werden können. Daher genügt es die Überlegungen für ein Horn auszuformulieren. Das Horn hat eine Helispiralflächenform. Das obere Ende läuft in eine Spitze zusammen, die gleichzeitig das Helispiralzentrum ist. Durch die Spitze geht



Abb.6.1: Hirschziegenantilope,
Glaeser G./Stachel H.,
1999, S. 290

¹¹ Ein bekanntes Beispiel für einen Wachstumsprozess, der durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird, ist eine Bakterienkultur, die sich innerhalb von 24 Stunden verdoppelt.

also auch die Achse der Helispiralung durch die die Helispiralfläche entsteht.

Die erzeugende Kurve der Hörner ist kreisförmig. Diese liegt in einer allgemeinen Ebene, deren Lage zur Achse wir nicht kennen. Zur Vereinfachung der Konstruktion verwenden wir im Beispiel als Profilkurve einen Kreis in einer Querschnittsebene.

Die gefundenen Hirschziegenantilopenhörner haben eine Länge von 33 cm bis 50 cm. Ich wähle daher für das Beispiel eine Länge von 42 cm, da die Hörner drei Gänge haben und die Ganghöhe somit 14 cm beträgt.

Spiralachse und Profilkurve

Wir beginnen mit der Spiralachse, die wir in die z -Achse legen. Sie wird durch eine Strecke festgelegt. Der unterste Punkt der Achse sei $(0/0/0)$, die Länge kann beliebig gewählt werden, da wir für weitere Konstruktionen nur die Lage der Achse snappen müssen.

Den Profilkreis legen wir in die xy -Ebene, die eine Querschnittsebene ist. Der Mittelpunkt sei im Punkt $(0/2/0)$ und der Radius beträgt 1,5 cm.

Helispiralen

Aus den Betrachtungen im Kapitel über Werkzeuge folgt, dass für Helispiralflächen das Werkzeug über „Schnitt konstruieren“ am besten geeignet ist. Als (Schnitt-)Kurven auf der Fläche verwenden wir Bahnhelispiralen. In unserem Fall genügen acht Helispiralen um eine glatte Fläche zu erhalten, weil das Profil im Vergleich zur Höhe des Horns klein ist. Wir wählen acht Punkte des Profilkreises aus, die regelmäßig am Kreis verteilt sind und zeichnen ihre Bahnhelispiralen.

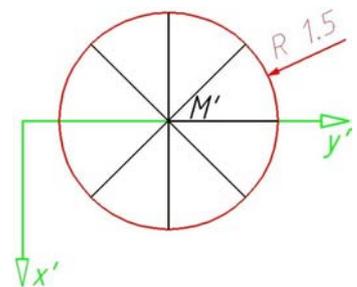


Abb.6.2

Man kann Helispiralen als Schnitt eines archimedischen Zylinders mit einem Drehkegel erzeugen. Diese Konstruktion funktioniert sehr gut¹², wir verwenden sie aber nicht, da das MicroStation-Werkzeug für Schraublinien auch Helispiralen erstellen kann.

¹² Im Kapitel 6.2 über Spiralfächen verwenden wir diese Konstruktion um eine zylindro-konische Spirale zu zeichnen. Will man mit Hilfe dieser Beschreibung eine Helispirale konstruieren, muss man statt einer logarithmischen eine archimedische Spirale in eine Normalebene der Achse legen.

Um mit „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a ) eine Helispirale zu erzeugen, verändert sich die Konstruktion zu einer Schraublinie nur darin, dass der Radius oben und unten unterschiedlich gewählt werden muss. Da wir sehr viele Angabeelemente zahlenmäßig kennen, ist es sinnvoll die Werte Radius Oben, Höhe und Steigung einzugeben. Damit müssen wir zum Platzieren einer Helispirale durch einen gegebenen Punkt den Mittelpunkt (hier (0/0/0)), den Punkt selbst als Anfangspunkt und die Achse anklicken.



Helispiralfläche über Schnitt konstruieren

Wir haben nun acht Helispiralen durch regelmäßig verteilte Punkte auf dem Profilkreis konstruiert. Bevor man die Helispiralfläche konstruiert, sollte man kontrollieren, ob alle Helispiralen gleich orientiert sind.

Will man die „Elementrichtung ändern“ (B-Spline-Kurven, 1b ) stellt man im Fenster der Funktion den Modus auf „Richtung ändern“. Man klickt die zu bearbeitende Kurve mit der linken Maustaste an. Ein Pfeil wird sichtbar, der anzeigt, wie die Kurve momentan orientiert ist. Entspricht das der falschen Richtung, bestätigt man mit der linken Maustaste, dass die Richtung tatsächlich geändert werden soll, sonst bricht man den Vorgang mit der rechten ab.

Entlang der Profilkurve laufend, klicken wir die Helispiralen nacheinander an. Da die Profilkurve geschlossen ist, muss die erste angeklickte Kurve zum Schluss noch einmal angeklickt werden.

Im Funktionskasten für „Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren“ (Fläche



modellieren, 1a ) stellen wir bei „Definieren über“ „Schnitt“ ein. Nach dem Anklicken der Helispiralen, klicken wir mit der linken Maustaste in das Zeichenfenster um die Fläche zeichnen zu lassen. Durch erneutes Drücken der linken Maustaste wird das Ergebnis angenommen, sonst abgelehnt.

Wie bereits im Kapitel über die Werkzeuge erwähnt, wird die Ordnung der B-Spline-Fläche in v-Richtung durch die Abschnittskurven, hier Helispiralen, bestimmt. Ist „Glättung zuweisen“ deaktiviert, so bestimmen die v-Linien die Kontinuität in diese Richtung. Wenn diese Option eingeschaltet ist, wird jede v-Linie durch eine B-Spline-Kurve innerhalb der gewählten Glättungstoleranz



Abb.6.3:
Horn

angenähert. Bei niedrigeren Toleranzwerten richtet sich die konstruierte Fläche stärker nach den Konstruktionselementen.

Auf Volumenelement verdicken oder Umwandeln in Volumenelement

Bis jetzt haben wir ein Flächenmodell der Oberfläche des Horns konstruiert. Da das Horn entweder ganz ausgefüllt ist oder eine gewisse Wandstärke besitzt, wandeln wir es in ein Volumen um oder verdicken es zu einem Volumenelement.



„Auf Volumenelement verdicken“ (3D-Haupt, 1b)



„3D umwandeln“ (Fläche modellieren, 1b)

Variationen der Konstruktion von Helispiralen

In dem beschriebenen Beispiel liegt das Profil in einer Normalebene der Achse und die Steigung der Helispiralen ist groß. Das ist der Grund für das gute Ergebnis. Die Konstruktion von Helispiralflächen,

- die flacher sind,
- durch eine allgemeine Profilkurve entstehen oder
- nicht im Spiralzentrum enden,

erfolgt dem Prinzip nach gleich wie im Beispiel „Horn einer Hirschziegenantilope“, aber es treten oft Ungenauigkeiten auf. In manchen Fällen ist die B-Spline-Kurve, welche die Helispirale darstellt, eine schlechte Approximation. Um die Näherung zu verbessern, kann man statt durchgehenden Helispiralen nur Kurven, die einen Gang darstellen, zeichnen. Eine B-Spline-Kurve, die nur einen Gang einer Helispirale darstellt, weicht fast nicht von der eigentlichen Kurve in diesem Bereich ab. Konstruiert man nur Kurven, die einen Gang darstellen und legt man mit Hilfe des Werkzeugs „über Schnitt konstruieren“ über jeden Gang einzeln eine Helispiralfläche und klebt diese anschließend zusammen, erhält man eine gute Approximation der Helispiralfläche.



„Flächen vereinigen“ (Fläche modellieren, 1b)

Die Helispiralen vor der Konstruktion der Fläche neu erstellen zu lassen, kann das Ergebnis auch verbessern.¹³



„Kurve neu erstellen“ (B-Spline-Kurven, 1b)

¹³ Dieser Konstruktionsschritt ist für Spiralfächen notwendig und daher wird das Werkzeug im nächsten Kapitel beschrieben.

Profilkurven in allgemeinen Ebenen

Die Spiralachse sei parallel zur z-Achse und das Helispiralzentrum liege auf der Achse. Die Profilebene habe allgemeine Lage gegenüber der Achse und liege „unter“ dem Helispiralzentrum. Um eine Helispiralfläche durch ein allgemein liegendes Profil zu zeichnen, konstruieren wir wieder

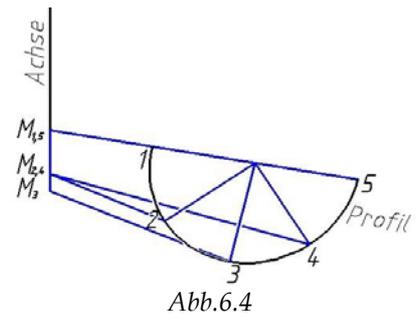


Abb.6.4

Bahnhelispiralen der Profilkurve. Da die Anfangspunkte unterschiedliche z-Koordinaten haben, ist es sinnvoll, die jeweiligen Normalenfußpunkte auf der Achse („Mittelpunkte“ nach MicroStation) vorher zu konstruieren. Weiters folgt aus den verschiedenen z-Koordinaten der Anfangspunkte, dass die Helispiralen unterschiedliche Ganghöhen und Höhen haben. Um die Ganghöhen und Höhen snappen zu können, zeichnet man die Profilkurve nach einem Gang bzw. in der Endlage, wenn diese verschieden von einem Punkt ist. Dadurch kann man auch den Endradius der jeweiligen Helispirale einfach anklicken. Durch eine Streckung mit dem Zentrum im Helispiralzentrum kann man das Profil in der Ausgangslage in die Lage nach einem Gang überführen ($\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{5}, \bar{M}_{1,5}, \bar{M}_{2,4}, \bar{M}_3$). Das Gleiche gilt für jede beliebige Lage zu einem vollen Gang. Zu je zwei Lagen zu vollen Gängen gibt es genau eine Streckung durch das Helispiralzentrum.

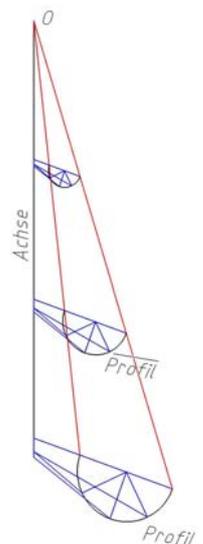


Abb.6.5

„Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a)

Um eine Helispirale durch 2 mit einem Gang zu konstruieren, klicken wir $M_{2,4}$ und 2, sowie $\bar{M}_{2,4}$ um die Ganghöhe und erneut $\bar{M}_{2,4}$, um die Höhe festzulegen und abschließend $\bar{2}$ an.

6.2 Spiralflächen

Beispiel: Muschel

Ich habe mich entschieden in diesem Kapitel eine Muschel darzustellen. Die Angaben des Beispiels habe ich aus dem Buch „Darstellende Geometrie II“ (Wunderlich W., 1967, Seite 217).

Bis auf die Konstruktion der Profilkurve, kann die Konstruktionsbeschreibung für jede Muschel verwendet werden.



Abb.6.6: Leier-Herzmuschel,
Dance S. P., 2003, S. 229

Angabe

Die Spiralachse ist parallel zur z -Achse und der Spiralparameter ist $p = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$. Das Profil ist eine Ellipse mit halben Achsenlängen $a = 3,5$ cm und $b = 2,5$ cm, die in einer Ebene durch die Achse liegt. Der Nebenseitel der Ellipse berührt die Achse im Spiralzentrum O . Die Muschel entsteht durch eine Spiraltung mit Drehwinkel $\sigma = 360^\circ$.

Achse und Profil

Wir legen die Spiralachse in die z -Achse und das Spiralzentrum O in den Punkt $(0/0/0)$.

 „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b)

Für die Konstruktion der zylindro-konischen Spiralen ist es von Vorteil die Ellipse in eine Achsenebene zu legen, die mit der yz -Ebene 45° einschließt.

 „Ellipse platzieren“ (Hauptpalette, 4b)

Wir erstellen die Muschel „über Schnitt konstruieren“, indem wir Bahnkurven von Punkten der Ellipse zeichnen. Die Ellipse ist symmetrisch bezüglich der Normalebene zur Achse durch O und daher sind auch die Bahnkurven von entsprechenden Punkten symmetrisch. Wir konstruieren vorerst nur die Bahnkurven der

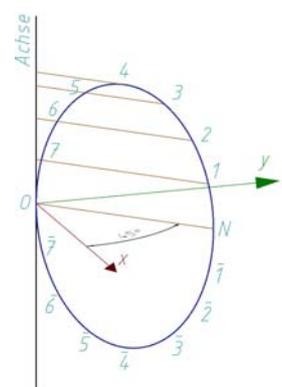


Abb.6.7: Hilfslinien

oberen Halbellipse und spiegeln die Bahnkurven anschließend. Um eine gute Annäherung der Fläche zu erhalten, konstruieren wir zylindro-konische Spiralen durch je drei Zwischenpunkte zwischen Haupt- und Nebenscheitel.

Vorbereitend für das Konstruieren der zylindro-konischen Spiralen, legen wir Normalen auf die Achse durch die Scheitel 4 und N, sowie durch die Zwischenpunkte 1, 2 und 3.

Die Punkte 1, 2, 3 können gesnappt werden, indem man die Anzahl der Unterteilungspunkte, die von AccuDraw gefangen werden, auf 16 stellt.

Logarithmische Spirale

Alle Punkte der Spiralisierung, die in der Normalebene zur Achse durch O liegen, durchlaufen unter der Spiralisierung eine logarithmische Spirale. Wir zeichnen als Erstes die logarithmische Bahn des Nebenscheitels N.

Vorbereitend für die Konstruktion der logarithmischen Spirale, zeichnen wir die Tangente im Anfangspunkt N. Wir wissen, dass alle Geraden durch den Ursprung die logarithmische Spirale (und damit auch die Tangenten) unter konstantem Winkel α schneiden. α lässt sich aus dem Spiralparameter durch $\cot \alpha = p$ berechnen. Daraus folgt für $\alpha = 60^\circ$.

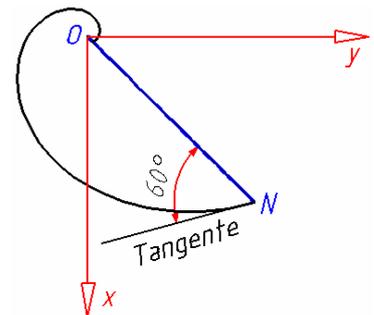


Abb.6.8: Tangente an logarithmische Spirale in N

Mit „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b ) klicken wir N an und drehen AccuDraw im Modus „Polarkoordinaten“ so, dass die Nullrichtung auf der Verbindung von O und N liegt. Im Fenster von AccuDraw stellen wir den Winkel auf 60° und zeichnen die Tangente so, dass sie bei Blick gegen die x-Achse vor der Ebene der Ellipse liegt.

Im Funktionskasten „Spirale platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a ) kann man zwischen drei Spiralen auswählen. Wir stellen „Typ“ auf „Logarithmus“. Die Einstellung „Anfangsradius“, „Endradius“ und „Winkel“ müssen mit Zahlenwerten belegt werden. Der „Anfangsradius“ ist durch die Ellipse auf 5 cm festgelegt und der „Winkel“ soll 360° betragen. Den Endradius müssen wir mit Hilfe der Formeln für die Spiralisierung $r = r_0 \cdot e^{p\sigma}$ berechnen: p ist aus der Angabe bekannt, r_0 ist der Anfangsradius und $\sigma = -2\pi$, weil die gesuchte Bahnkurve zum Spiralzentrum läuft. $r = 5 \cdot e^{-0,577 \cdot 2\pi} = 0,132899$. Die Toleranz muss nicht eingestellt werden, wir wählen sie aber aus und tragen den kleinstmöglichen Wert 0,0001 ein, um eine gute Annäherung zu sichern.

Die logarithmische Spirale ist eine ebene Kurve, deren Lage wir durch die Lage von AccuDraw festlegen. Wir drehen also AccuDraw mit „t“ in die xy-Ebene. Als Erstes muss der Anfangspunkt gesnappt werden. Danach ist die Richtung der Tangente in diesem Punkt

gefragt, die wir durch einen Punkt der konstruierten Tangente angeben. Offen ist noch, auf welcher Seite der Tangente die Kurve verläuft, was mit dem letzten Punkt angegeben wird. Dafür können wir z.B O snappen.

Konstruktion einer zylindro-konischen Spirale

Wir beginnen mit der zylindro-konischen Spirale durch den Punkt 1.

MicroStation hat keine eigene Funktion für zylindro-konische Spiralen. Folgende zwei Möglichkeiten bieten sich an, um eine zylindro-konische Spirale zu konstruieren:

1. Die Kurve als Schnitt eines Zylinders mit einer logarithmischen Spirale als Basis und einem Kegel erzeugen
2. Die Kurve mit Hilfe des Werkzeugs „Kurvenberechnung“ programmieren und platzieren.

Im Folgenden ist die erste Möglichkeit beschrieben.

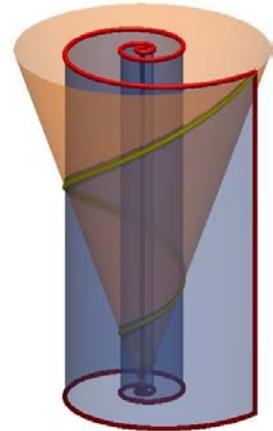


Abb.6.9: logarithmischer Zylinder
Drehkegel mit Spitze in O
zylindro-konische Spirale

Logarithmische Spirale

Für das Zeichnen der logarithmischen Spirale durch 1 muss man den Normalabstand des Punkts 1 zur Achse bestimmen. Dies kann durch Rechnung oder Messung geschehen. Die Messung stimmt mit dem rechnerischen Ergebnis auf mindestens zwei Nachkommastellen überein. Da die Ellipse durch eine B-Spline-Kurve angenähert ist, verwenden wir die Messung, um sicherzustellen, dass die logarithmische Spirale durch 1 geht.

 „Entfernung messen“ (Hauptpalette, 7a)

Lotrechter Zylinder

Um den lotrechten Zylinder mit der logarithmischen Spirale als Leitlinie zu erstellen, verwenden wir „Extrudieren“ (3D-Haupt, 1b ). Die Erzeugenden des Zylinders sind parallel zur Achse. Der Zylinder sollte etwas unter der Normalebene der Achse durch O enden.

Drehkegel

Durch die waagrechte Hilfslinie durch 1, können wir den Mittelpunkt des Basiskreises snappen, 1 legt den Radius fest und die Spitze O die Höhe. Der Kegel sollte als Fläche und nicht als Volumen konstruiert werden.

 „Kegel platzieren“ (3D-Haupt, 1a)

Zylindro-konische Spirale

Mit „Trimmung erstellen“ (Fläche modellieren, 1b ) können wir die zylindro-konische Spirale als Schnittkurve des logarithmischen Zylinders mit dem Drehkegel erzeugen.

Zylindro-konische Spiralen durch Punkte mit gleicher z-Koordinate

Jede andere zylindro-konische Spirale der Fläche könnte wie die durch 1 konstruiert werden. Das lässt sich vereinfachen, indem man die Spiralen aufeinander abbildet. Wendet man auf die konstruierte Bahnspirale von 1 eine axiale Streckung mit der Spiralachse als Achse an, sodass 1 in 7 übergeführt wird, erhält man die zylindro-konische Spirale durch 7.

Wir überlegen das anhand der einzelnen Konstruktionsschritte durch:

Logarithmische Spirale

Die logarithmische Spirale durch 1 liegt in derselben Normalebene der Achse wie die von 7. Die Einschränkung der axialen Streckung auf die Normalebene ist eine ebene zentrische Streckung mit dem Schnittpunkt der Achse und der Normalebene als Zentrum. Bei der zentrischen Streckung von 1 nach 7, wird die logarithmische Spirale von 1 in die von 7 abgebildet.

Lotrechter Zylinder

Die Erzeugenden des Zylinders sind parallel zur Achse der axialen Streckung, daher liefert die axiale Streckung des Zylinders durch 1 den lotrechten Zylinder von 7.

Drehkegel

Die Achse des Drehkegels ist ident mit der Achse der axialen Streckung. Der Mittelpunkt des Basiskreises und die Spitze des Kegels sind daher Fixpunkte. Die Abbildung des Drehkegels durch 1 erzeugt somit den Drehkegel durch 7.

Mit Hilfe des Werkzeuges „Skalieren“ (Hauptpalette, 8b ) wollen wir die axiale Streckung realisieren. Die gesuchte Bahnspirale von 7 ist nicht proportional zu der durch 1. In Achsenrichtung soll keine Skalierung stattfinden, während in x- und y-Richtung der gleiche Skalierungsfaktor notwendig ist. Bei der Wahl der Methode kommt die spezielle Lage der Profilebene zum Tragen. Wir können die Methode „3 Punkte“ auswählen, weil durch die 45° geneigte Ebene gegenüber der yz-Ebene in x- und y-Richtung gleich skaliert wird und z beliebig gewählt werden kann.



Nacheinander muss die zylindro-konische Spirale, der Normalenfußpunkt von 1 auf der Achse und danach die Punkte 1 und 7 angeklickt werden.

Zylindro-konische Spiralen durch Punkte mit anderer z-Koordinate

Mit den nächsten Überlegungen konstruieren wir die zylindro-konische Spirale durch den Punkt 2. Für die Punkte 3 und 4 gilt Analoges.

Die zylindro-konische Spirale durch den Punkt 1 kann durch zwei Abbildungen auf die zylindro-konische Spirale durch 2 abgebildet werden: eine axiale Streckung und eine zentrische Streckung (Zentrum O). Um Bahnkurven von Punkten durch axiale Streckungen aufeinander abbilden zu können, müssen die Punkte auf einer Normalen zur Achse liegen.

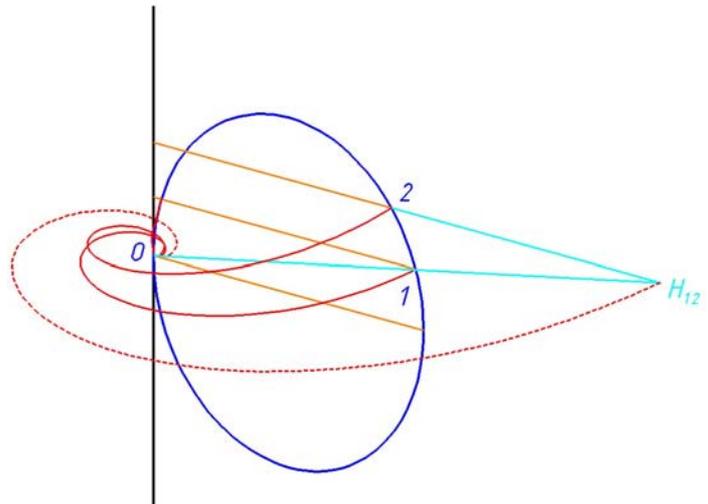


Abb.6.10

Bei den Punkten 1 und 2 ist das

nicht der Fall, daher verwenden wir vorher eine zentrische Streckung mit Zentrum O , die 1 auf die Normale auf die Achse durch 2 abbildet.

In der Abbildung 6.10 sieht man, wie die beiden Abbildungen funktionieren: Durch die zentrische Streckung wird 1 auf den Hilfspunkt H_{12} abgebildet und durch die axiale Streckung geht H_{12} in 2 über.

Bevor wir aber die beiden Abbildungen hintereinander ausführen, betrachten wir sie analytisch.

Bei einer zentrischen Streckung mit Zentrum O wird der (Orts-)Vektor (x_0, y_0, z_0) auf (ax_0, ay_0, az_0) abgebildet, wobei a der Skalierungsfaktor ist.

Für eine axiale Streckung mit der z -Achse als Achse und k als Streckfaktor gelten folgende Abbildungsgleichungen:

$$x_1 \rightarrow k \cdot x_1$$

$$y_1 \rightarrow k \cdot y_1$$

$$z_1 \rightarrow z_1$$

Führt man die beiden Abbildungen hintereinander aus, erhalten wir eine Abbildung

die $x_0 \rightarrow ka \cdot x_0 = bx_0$

$$y_0 \rightarrow ka \cdot y_0 = by_0$$

$$z_0 \rightarrow a \cdot z_0 = az_0 \text{ leistet.}$$

Das heißt, wir können mit einer Skalierung, die x und y gleich und z anders skaliert, die zylindro-konische Spirale durch 1 auf die durch 2 abbilden.

Wir können wieder die Methode „3 Punkte“ beim „Skalieren“ (Hauptpalette, 8b ) verwenden. Die Einstellung proportional muss deaktiviert sein.

Spiegeln der zylindro-konischen Spiralen

Exemplarisch spiegeln wir die zylindro-konische Spirale von 2 um die von $\bar{2}$ zu erhalten. Die Spiegelebene ist die xy -Ebene.

Im Funktionskasten „Spiegeln“ (Hauptpalette, 8b ) kann man auswählen, ob man horizontal, vertikal oder um eine Linie spiegeln will. Unsere Spiegelebene ist horizontal. Die Lage der Spiegelebene wird durch die Lage von AccuDraw festgelegt: Ist horizontal eingestellt, legt MicroStation parallel zur x -Achse von AccuDraw eine Normalebene auf die AccuDraw-Ebene. Daher muss man um an einer waagrechten Ebene zu spiegeln, AccuDraw in die Position „Front“ oder „Side“ drehen. Die genaue Lage der Spiegelebene wird durch einen Punkt der Ebene bestimmt. Wir klicken also die zylindro-konische Spirale durch den Punkt 2 an und klicken einen Punkt der Spiegelebene z.B. O an. Die Einstellung „Kopie“ anklicken nicht vergessen!

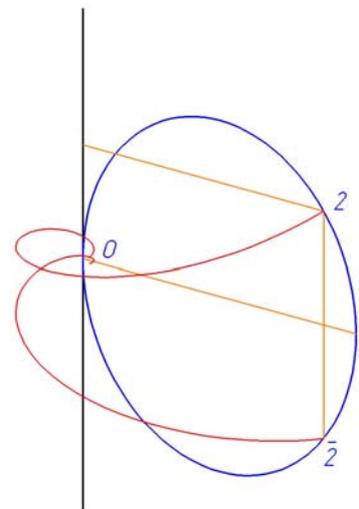


Abb.6.11

Markiert man vor dem Spiegeln alle Kurven und klickt dann die Funktion „Spiegeln“ an, so werden alle ausgewählten Kurven auf einmal kopiert und gespiegelt.

Kurven neu erstellen

Wie schon bei den Helispiralen erwähnt, ist für eine gute Approximation notwendig, die Kurven neu zu erstellen.

MicroStation stellt drei Möglichkeiten zur Auswahl, um eine „Kurve neu zu erstellen“ (B-Spline-Kurven, 1b ) zu erstellen. Verwendet man „Neu erstellen“ wird die Kurve mit einer wählbaren Toleranz neu konstruiert. Bei „Daten reduzieren“ wird die Anzahl der Kontrollpunkte reduziert, die Ordnung der Kurve wird nicht verändert. „Neu parametrisieren“ erzeugt eine regelmäßige Verteilung der Knoten der B-Spline-Kurve.

Wir wählen den Typ „Neu erstellen“. Da die zylindro-konischen Spiralen keine Spitzen haben und keine der Spiralen mit einer ihrer Tangenten zu einer komplexen Kette verbunden ist, müssen die Einstellungen „Spitze beibehalten“ und „Tangente beibehalten“ nicht angeklickt werden. Aktiviert man „Kopie erstellen“ wird die Orginalkurve nach Erstellung

der neuen Kurve nicht gelöscht. Wir brauchen die Originalkurve nicht, daher deaktivieren wir „Kopie erstellen“. Die neue Kurve soll die ursprüngliche Kurve so gut wie möglich annähern, daher stellen wir die Toleranz kleinstmöglich ein.

Die zylindro-konische Spirale muss nur angeklickt werden und durch ein zweites Mal Klicken, bestätigt werden.

Elementrichtung ändern

Vor dem Konstruieren der Fläche ist es sinnvoll zu kontrollieren, ob alle Elemente gleich orientiert sind und gegebenenfalls die Richtung zu ändern.



„Elementrichtung ändern“ (B-Spline-Kurven, 1b)

Muschel erzeugen

Über die zylindro-konischen Spiralen legen wir mit „über Schnitt konstruieren“ eine Fläche, die die Oberfläche der Muschel darstellt. Um realitätsnäher zu sein, verdicken wir die Fläche abschließend.



„Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a)



„Auf Volumenelement verdicken“ (3D-Haupt, 1b)

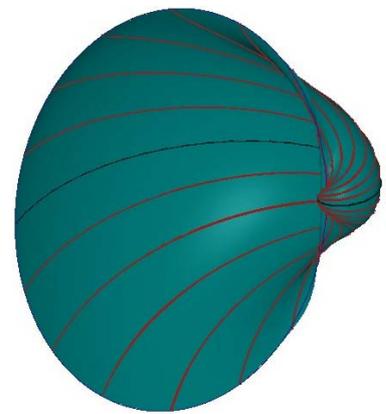


Abb.6.12

Anhang

Die in den Kapiteln vier und sechs beschriebenen Beispiele, sind auf den folgenden Seiten in Form von Arbeitsblättern aufbereitet. Diese geben in vereinfachter Art und Weise den Konstruktionsgang wieder und befassen sich nicht mit allgemeinen Überlegungen. Die Beschreibungen beziehen sich ausschließlich auf das Arbeiten mit MicroStation. Mit Hilfe der Arbeitsblätter können die Beispiele einfach und schülergerecht im Unterricht eingebunden werden.

Folgende Beispiele sind als Arbeitsblätter gestaltet:

- Klangstäbe (aus Kapitel 4.1.1)
- Schraubfläche mit Profilkurve in Form eines Pilzes (aus Kapitel 4.1.2)
- Rundgewinde (aus Kapitel 4.2.1)
- Geschwungene Säule (aus Kapitel 4.2.2)
- Radständer (aus Kapitel 4.2.3)
- Horn einer Hirschziegenantilope (aus Kapitel 6.1)
- Muschel (aus Kapitel 6.2)

Arbeitsblatt Klangstäbe

Sechs Klangstäbe, die wir als Drehzylinder darstellen, hängen an einem Ring. Die oberen Enden der Zylinderachsen liegen regelmäßig verteilt auf einem Kreis k . Die unteren Enden der Zylinderachsen liegen auf einer Schraublinie s . Die Schraublinie s , sowie die Drehzylinder wollen wir konstruieren.



Vorbereitung für die Konstruktion der Schraublinie s

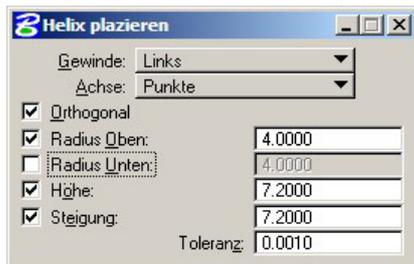
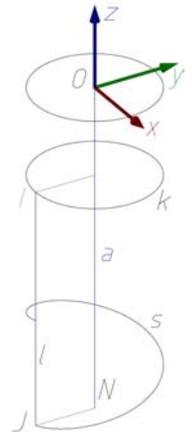
Der Mittenkreis des Ringes, an dem die Klangstäbe befestigt sind, hat den Mittelpunkt $O=(0/0/0)$ und den Radius 4 cm. 6 cm tiefer liegt der Hilfskreis k ($r = 4$ cm), auf dem die oberen Enden der Zylinderachsen liegen. In $I=(0/-4/-6)$ zeichnen wir als Mittellinie des längsten Klangstabes eine lotrechte, 16 cm lange Strecke l ($\Rightarrow J=(0/-4/-22)$). „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b)

Schraubung festlegen

Um die Schraublinie s zu zeichnen, müssen wir die dazugehörige Schraubung durch Achse und Ganghöhe festlegen. Die lotrechte Schraubachse a realisieren wir als Hilfsstrecke $[N=(0/0/-22), (0/0/-6)]$ mit „Linie platzieren“. Die Ganghöhe berechnen wir aus den Längen der Stäbe. Die Längendifferenz des längsten und kürzesten Rohrs beträgt 6 cm. Läuft man den Kreis k im Uhrzeigersinn entlang, so ist der Winkel zwischen dem längsten und dem kürzesten Rohr $2\pi \cdot \frac{5}{6} = \frac{5\pi}{3}$. Daraus lassen sich der Parameter p und die Ganghöhe h berechnen:

$$p = \frac{l}{\lambda} = \frac{6}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{18}{5\pi} \Rightarrow h = 2p\pi = 2\pi \frac{18}{5\pi} = \frac{36}{5} = 7,2 \text{ cm}$$

Aus dem Foto erkennt man, dass es sich um eine Linksschraubung handelt.



Konstruieren einer Schraublinie s

Mit „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a) zeichnen wir die Schraublinie von $J=(0/-4/-22)$ mit den Einstellungen des nebenstehenden Funktionskastens. (Anmerkung: Die „Steighöhe“ entspricht der Ganghöhe).

Als Erstes müssen wir den Normalenfußpunkt N von J (MicroStation bezeichnet den Normalenfußpunkt als „Mittelpunkt“), dann den „Anfangspunkt“ J und einen Punkt der Achse (z.B. Endpunkt der Hilfsstrecke) anklicken.

Rohre als Drehzylinder

Der Radius der Drehzylinder ist 0,8 cm. Das längste Rohr kann mit Hilfe der Strecke l gezeichnet werden. „Zylinder platzieren“ (3D-Haupt, 1a)

Da die Anfangspunkte der Achsen auf k gleichmäßig verteilt sind, sind die Endpunkte auf der Schraublinie regelmäßig verteilt. Daher stellen wir die Fangfunktion von AccuDraw durch Drücken von „k“ auf 6 Teilungspunkte. Im Fenster von „Zylinder platzieren“ geben wir den Radius 0,8 cm ein, snappen einen Teilungspunkt der Schraublinie, fixieren die Richtung der Drehachse in z -Richtung und können die Länge des Zylinders durch Snappen eines beliebigen Punkts auf k bestimmen.



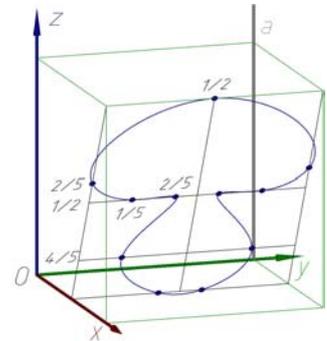
Arbeitsblatt Schraubfläche mit Profilkurve in Form eines Pilzes

Eine in der Form eines Pilzes gegebene Kurve k wird verschraubt und die dabei entstehende Fläche soll konstruiert werden.

Angabe

Die **Schraubung** ist durch die Achse (z-parallel durch $(0/10/0)$) und die Ganghöhe $h = 15$ cm festgelegt. Wir stellen die Achse durch eine Strecke a $[(0/10/0), (0/10/30 = 2 \cdot 15)]$ (Hauptpalette, 2b ) dar, weil wir zwei Gänge zeichnen wollen.

Die **Kurve** k liegt in der Ebene, die durch die Punkte $(5/0/0)$, $(5/10/0)$ und $(10/0/10)$ aufgespannt wird. Wir stellen die Ebene durch die Seiten eines Rechtecks dar und zeichnen - wie in der Abbildung ersichtlich, wobei sich die Bruchangaben auf die Rechteckseiten (bzw. Hilfslinien) beziehen - drei zusätzliche Hilfslinien (Hauptpalette, 2b ). Für die waagrechte Hilfslinie „4/5“ stellen wir die Fangfunktion von AccuDraw durch Drücken von „k“ auf 5.



Profil erstellen

Wir konstruieren die Profilkurve als „B-Spline-Kurve“ (B-Spline-Kurven, 1a ). Dabei verwenden wir die Methode „Durch Punkte“ und geben die Datenpunkte mit Mausklick direkt ein. Die Punkte, die aus der Skizze ersichtlich sind, klicken wir dem Kurvenverlauf folgend an, wobei der Fangfunktionsdivisor auf 5 gestellt sein sollte. Mit der rechten Maustaste beenden wir die Eingabe der Punkte und eine kubische B-Spline-Kurve wird durch sie gelegt.



Schraubung festlegen

Für die Konstruktion der Schraubfläche ist es notwendig eine Schraublinie der Schraubung anzugeben. Wir zeichnen die Schraublinie des Punkts $O=(0/0/0)$, indem wir sie mit dem Werkzeug „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a ) interaktiv konstruieren (d.h. wir snappen alle Angabestücke). Folgende Punkte müssen nacheinander angeklickt werden:

- „Mittelpunkt“: Normalenfußpunkt von P auf der Schraubachse, hier $(0/10/0)$
- „Anfangspunkt“: Punkt, von dem die Schraublinie gezeichnet werden soll, hier O
- $(0/10/15)$ als Mittelpunkt von a um die Achse und Ganghöhe festzulegen
- $(0/10/30)$ um die Höhe der Schraublinie festzulegen
- Abschließend muss der Radius oben gesnappt werden. Dazu drehen wir AccuDraw in die Lage „Front“, fixieren die Zeichenrichtung in Richtung der negativen y -Achse [Taste y] und snappen dann den Anfangspunkt.

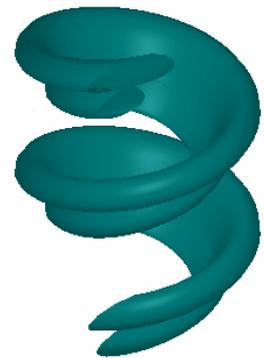
Schraubfläche konstruieren

Mit „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a ) erstellen wir die gesuchte Schraubfläche.



Wir wollen das Profil nicht skalieren, daher geben wir bei beiden „Maßstäben“ eins ein. Das Profil soll unter der Schraubung nicht verdreht

werden, daher soll der Drehwinkel gleich Null sein. Nacheinander müssen nun die Schraublinie, das Profil, die Schraubachse und ein beliebiger (Daten-)Punkt im Raum angeklickt werden.



Querschnitt und Meridian

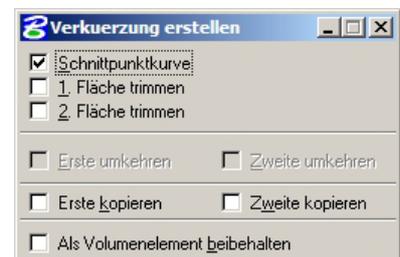
Um einen besseren Eindruck über die Form der Schraubfläche zu erhalten, konstruieren wir einen Quer- und Meridianschnitt der Fläche.

Die Schnittebenen stellen wir durch Rechtecke dar:

Querschnitt: Mit „Rechteck platzieren“ (Hauptpalette, 3b ) klicken wir (0/10/15) an und zeichnen in der AccuDraw-Ebene „Top“ ein Quadrat mit Seitenlänge 30 cm. Wir „verschieben“ (Hauptpalette, 8b ) dieses Quadrat um den ganzen Querschnitt zu erhalten. Mit  „Mitte fangen“ klicken wir das Rechteck an und legen es in (0/0/15 = h) ab.

Meridianschnitt: Mit „Rechteck platzieren“ (Hauptpalette, 3b ) klicken wir (0/10/0) an und zeichnen in der AccuDraw-Ebene „Front“ ein Quadrat mit Seitenlänge 15 cm.

Für das Konstruieren der Schnittkurven verwenden wir „Trimmung erstellen“ (Fläche modellieren, 1b ). Wir wählen die Schraubfläche und die Querschnitts- bzw. Meridianebene aus. Nach einmal Klicken in das Zeichenfenster wird das Ergebnis gezeigt und durch einen weiteren Mausklick mit der linken Taste wird das Ergebnis angenommen sonst abgelehnt.



Arbeitsblatt Rundgewinde

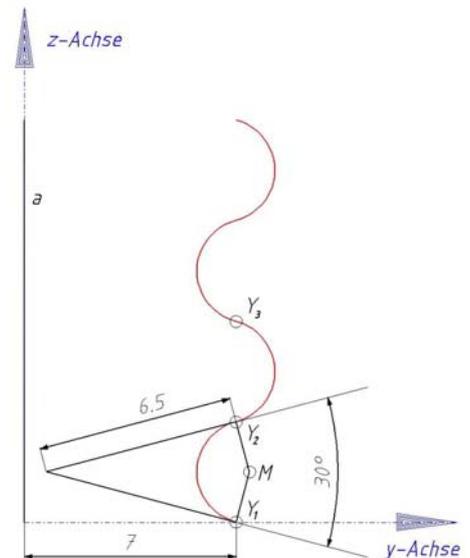
In diesem Beispiel wollen wir ein Rundgewinde konstruieren, wie es bei Glühbirnen zur Anwendung kommt. Ein Rundgewinde hat einen Meridianschnitt, der aus kongruenten Kreisbögen besteht, die einander berühren.



Angabe

Das **Profil**, das durch die Skizze festgelegt ist, legen wir in die yz -Ebene. Zusätzlich sei erwähnt, dass die Tangente in $Y_1=(0/7/0)$ mit der y -Achse aus Symmetriegründen einen Winkel von 15° einschließt. Die einzelnen Kreisbögen (Hauptpalette, 4a ) sind zu konstruieren und anschließend mit „komplexe Kette erstellen“ (Hauptpalette, 6a ) zu einer durchgehenden Kurve zu verbinden.

Schraubung: Als Achse der Rechtsschraubung und des Gewindes wählen wir die z -Achse. Mit „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b ) stellen wir die Achse als Strecke a dar, die in $(0/0/0)$ beginnt und gleich hoch wie das Profil ist. Unter der Schraubung muss der erste Kreisbogen des Profils in den dritten übergeführt werden. Dadurch ist die Ganghöhe h bestimmt.



Schraubung festlegen

Die Schraubung muss in MicroStation durch eine Schraublinie angegeben werden. Wir zeichnen mit „Helix platzieren“ (Fläche modellieren, 1a ) zwei Gänge der Bahnkurve von Y_1 unter der Schraubung. Mit den Einstellungen „Gewinde: Rechts“ und „Achse: Punkte“ klicken wir folgende Punkte nacheinander an:

- „Mittelpunkt“: Normalenfußpunkt von Y_1 auf der Schraubachse, hier $(0/0/0)$
- „Anfangspunkt“: Punkt, von dem die Schraublinie gezeichnet werden soll, hier Y_1
- $(0/0/\text{Ganghöhe } h)$ als Mittelpunkt von a , um die Achse und Ganghöhe festzulegen
- $(0/0/2h)$ als Endpunkt der Schraubachse, um die Höhe der Schraublinie festzulegen.
- obersten Profilverpunkt, wodurch der „Radius oben“ bestimmt ist

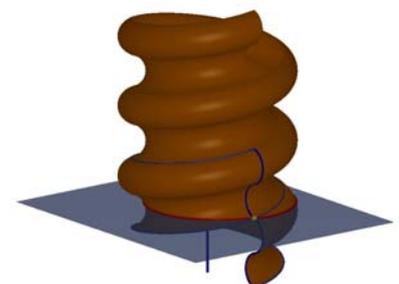
Profil verschrauben

Mit , „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a) klicken wir die konstruierte Schraublinie, die Profilkurve, die Schraubachse und einen beliebigen Datenpunkt an. (Die Einstellungen sind wie im Funktionskasten vorzunehmen.)



Schraubfläche abschneiden

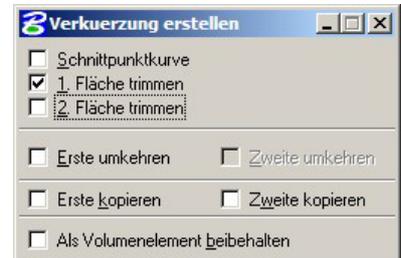
Bis jetzt haben wir eine dünne Flächenhaut erzeugt, die wir zu einem Volumen umgestalten. Dazu schneiden wir die Schraubfläche oben und unten ab. Die waagrechten Schnittebene stellen wir als Rechtecke dar (Hauptpalette, 3b )



„**Schnittebene unten**“: In der Höhe von Y_3 zeichnen wir ein Quadrat ($a = 20 \text{ cm}$), wobei Y_3 keiner Seitenkante des Quadrats angehören darf.

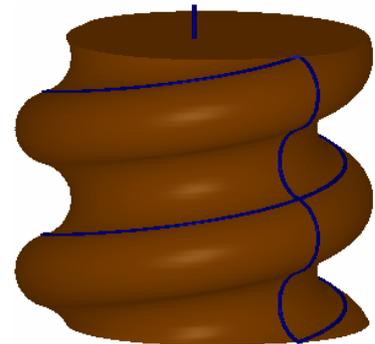
„**Schnittebene oben**“: Wir verschieben das gezeichnete Quadrat mit „Kopieren“ (Hauptpalette, 8b ) um 2 Ganghöhen nach oben.

Mit „Trimmung erstellen“ (Fläche modellieren, 1b ) schneiden wir die Fläche ab. Wir stellen „1. Fläche trimmen“ ein und klicken die Schraubfläche und dann die Schnittebene unten bzw. oben an. Durch Klicken der linken Maustaste, wird das Ergebnis erstellt und durch ein erneutes Klicken mit der linken Taste angenommen sonst abgelehnt.



In Volumen umwandeln

Mit dem Werkzeug „3D umwandeln“ (Fläche modellieren, 1b ) kann nun die Fläche in ein Volumen umgewandelt werden. Wir stellen „Umwandeln in: „Volumenelement“ ein, klicken die Fläche an und bestätigen die Auswahl. MicroStation schließt die Fläche durch Deckflächen und füllt den abgeschlossen Bereich aus.



Arbeitsblatt Geschwungene Säule

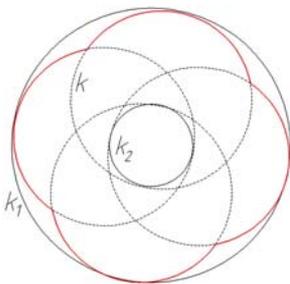
Eine geschwungene Säule entsteht durch Verschrauben von Kreisen, die in einer Normalebene der Achse liegen. Wir konstruieren in diesem Beispiel eine solche Säule.

Angabe

Schraubung: Die Achse der Rechtsschraubung liegt in der z-Achse. Wir stellen sie durch eine Strecke dar (Hauptpalette, 2b ) , die in $O=(0/0/0)$ beginnt und deren Länge der Ganghöhe (50 cm) entspricht.



Die **Profilkurve** besteht aus vier gleich großen Kreisen, die zwei konzentrische Kreise k_1 und k_2 berühren. Wir zeichnen als Erstes in der xy -Ebene k_1 (Mitte O , $r_1=10$ cm) und k_2 (Mitte O , $r_2=3$ cm). (Hauptpalette, 4b ) .



Zur Konstruktion eines Hilfskreises k , stellen wir die Fangfunktion auf „tangential“  und snappen k_1 und k_2 mit der Tentativtaste in Bereichen, die bezüglich O gegenüber liegen. Aus einer Schar von Kreisen wählen wir durch Wahl eines dritten Punkts einen beliebigen Kreis aus.

Mit „Matrix konstruieren“ (Hauptpalette, 8b ) konstruieren wir die anderen Kreise des Profils. Wir benutzen die nebenstehenden Einstellungen. Durch Anklicken des Kreises k und O werden die anderen Kreise erzeugt.



Für das Erstellen der Säule sind nur jene Teile der Kreise wichtig, die für die Oberfläche der Säule interessant sind. Dazu verwenden wir die Funktion „Bereich erstellen“ (Hauptpalette 9b ) , wählen die Methode „Vereinigung“ aus und klicken die 4 Kreise an. Mit der rechten Maustaste beendet man die Eingabe von Elementen.

Schraubfläche konstruieren

Für die Konstruktion der Schraubfläche benötigen wir eine Bahnkurve der Schraubung. Wir zeichnen einen Gang der Schraublinie von $(0/10/0)$. Folgende Punkte müssen mit „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a ) nacheinander angeklickt werden: $(0/0/0)$, $(0/10/0)$, $(0/0/50)$, $(0/0/50)$. Abschließend geben wir den „Radius oben“ (10 cm) über AccuDraw ein. Die „Schraubfläche konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a ) wird durch Anklicken der Schraublinie, des Profils, der Schraubachse und eines beliebigen Datenpunkts.

In Volumen verwandeln

Wir wandeln das Oberflächenmodell der Säule in ein Volumen mit „3D konvertieren“ (Fläche modellieren, 1b ) um. Dazu muss nur die Fläche angeklickt werden.

Material zuweisen

Um der Säule mehr Realitätsnähe zu verschaffen, ordnen wir ihr ein Material zu.

Dazu gehen wir in dem Menüpunkt auf **Einstellungen-Rendern-Material zuweisen**. Mit **Datei-Palette öffnen** wählen wir in der Palette „floors.pal“ Marmor (Marble High Gloss) aus. Wir markieren das gewünschte Material und klicken in der Menüleiste auf **Funktionen-Durch Auswahl zuweisen**. Durch Anklicken der Säule weist man das Material zu.

Arbeitsblatt Radständer

Diesen Radständer findet man mittlerweile fast in ganz Österreich, denn die Supermarktkette „Hofer“ hat ihn auf ihre Parkplätze gestellt. Eine Schraubrohrlfläche ist für das Stehenbleiben der abgestellten Fahrräder verantwortlich. Der Ständer soll konstruiert werden.

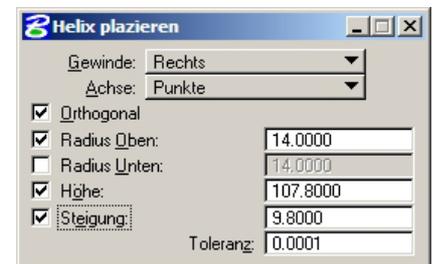


Angabe der Schraubung

Die Schraubachse wählen wir parallel zur y -Achse durch den Punkt $M=(0/0/33)$. Die Ganghöhe beträgt 9,8 cm und wir benötigen 11 Gänge. Wir stellen die Schraubachse durch die Strecke $[M=(0/0/33), (0/107,8/33)]$ dar. „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b, )

Mittenschraublinie konstruieren

Mit „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a ) zeichnen wir die Bahnschraublinie des Punkts $A=(0/0/47)$, die die Mittenschraublinie der Schraubrohrlfläche ist. Die Einstellungen sind wie im abgebildeten Funktionskasten vorzunehmen. Wir snappen M , A , sowie einen beliebigen Punkt der Achse.



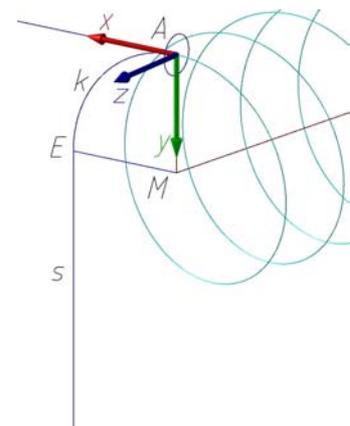
Profilkreis

Der Profilkreis liegt in der Normalebene durch A auf die Schraublinie. (Mittelpunkt A , Radius 2,4 cm)

Um die Normalebene in A auf die Mittenschraublinie zu konstruieren, zeichnen wir als Erstes die Tangente in A an die Schraublinie. Wir wählen das Werkzeug „Linie platzieren“ (Hauptpalette, 2b ) aus, stellen die Snapfunktion auf „Punkt auf Tangente fangen“  und snappen den Endpunkt A der Schraublinie. Damit ist die Zeichenrichtung in Richtung der Tangente fixiert und wir zeichnen eine 5 cm lange Tangente.*

Für die Konstruktion des Profilkreises definieren wir ein Hilfskoordinatensystem (ACS) in A . Mit  „ACS definieren (durch Punkte)“ (Toolbox Hilfskoordinaten (ACS)) snappen wir A , einen Punkt der konstruierten Tangente - das legt die Richtung der neuen x -Achse fest - und M - wodurch die y -Achse festgelegt wird.

Den „Kreis platzieren“ (Hauptpalette, 4b ) wir, indem wir durch eventuell mehrmaliges Drücken von „E“ AccuDraw in die neue yz -Ebene des ACS's legen.



* Sollte die Konstruktion nicht funktionieren, kann man die Tangente mit Hilfe des Werkzeugs „Kurve auswerten“ (B-Spline-Kurven, 1b ) erstellen.

Kreis verschrauben

Um die „Schraubfläche zu konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a ) klicken wir die Mittenschraublinie, den Profilkreis und die Achse, sowie einen beliebigen Datenpunkt an.

Stützen konstruieren

Die beiden Stützen sind gleich, daher konstruieren wir eine Stütze und kopieren sie dann an das andere Ende des Radständers. Wir beginnen am Ende der Schraubfläche, wo wir bereits das Hilfskoordinatensystem gelegt haben.

Die Stützen des Radständers bestehen aus einem Zylinder und einem Torusteil. Um einen glatten Übergang zwischen Schraubrohrfläche, Torus und Zylinder zu schaffen, konstruieren wir die Stützen, indem wir eine passende Mittellinie einer Rohrfläche erzeugen. Die Mittellinie besteht also aus (siehe Skizze vorherige Seite)

- einem Kreisbogen k , der in der xy -Ebene des Hilfskoordinatensystems liegt, den gleichen Radius wie die Mittenschraublinie hat und im Punkt A die gleiche Tangente wie die Schraublinie besitzt und
- einer in E tangential anschließenden lotrechten Strecke s , die 33 cm lang ist.

Mit „SmartLine platzieren“ (Hauptpalette, 2b ) zeichnen wir den Kreisbogen und anschließend die Strecke. Für den Kreisbogen stellen wir „Segmentart“ auf „Bögen“ und klicken A, M und E an. Dann stellen wir „Segmentart“ auf Linie (ohne die Konstruktion der Smartlinie abzuschließen) und zeichnen die lotrechte Strecke.

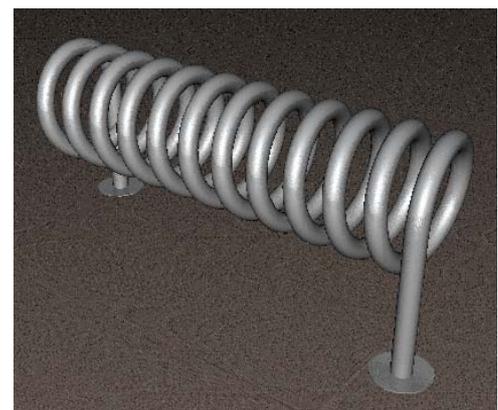
Den Kreis, den wir für die Erzeugung der Schraubrohrfläche verwendet haben, verschieben wir mit „Entlang eines Pfades Extrudieren“ (3D-Haupt, 1b ) entlang des Pfades. Wir stellen „Typ: Fläche“ und „Anhängen: Profil an Pfad“ ein und klicken den Pfad, das Profil und einen beliebigen Datenpunkt an.

Die fertige Stütze „kopieren“ (Hauptpalette, 8b ) wir an das Ende der Schraubrohrfläche und „drehen“ () sie um 180° um die y -Achse des Hilfskoordinatensystems.

Radständer fertigstellen

Die beiden Stützen verbinden wir mit der Schraubrohrfläche zu einer Fläche. Mit „Flächen vereinigen“ (Fläche modellieren, 1b ) müssen die erste Stütze, die Schraubrohrfläche und die zweite Stütze angeklickt und anschließend bestätigt werden.

Da das Metall des Ständers eine bestimmte Dicke hat, „verdicken wir auf ein Volumenelement“ (3D-Haupt, 1b ) mit Dicke 0,5 cm nach innen.



Unter den Stützen befindet sich noch eine zylindrische Platte (3D-Haupt, 1a ) mit Radius 7 cm und Höhe 0,5 cm. Wir stellen sie als Volumen dar, um sie abschließend mit dem gezeichneten Körper zum Radständer zu vereinigen. (3D-Haupt, 2a )

Arbeitsblatt Horn einer Hirschziegenantilope

Wir wollen das Horn der abgebildeten Antilope zeichnen. Das Horn hat die Form einer Helispiralfläche.



Angabe

Spiralung: In die z -Achse legen wir die Spiralachse und stellen sie durch eine Strecke dar (Hauptpalette, 2b ): $(0/0/0)$ sei der Anfangspunkt und weil das Horn 42 cm lang ist, sei $(0/0/42)$ der Endpunkt. $(0/0/42)$ ist gleichzeitig das Helispiralzentrum und Punkt des Horns. Das Horn hat 3 Gänge, womit die Ganghöhe 14 cm beträgt.

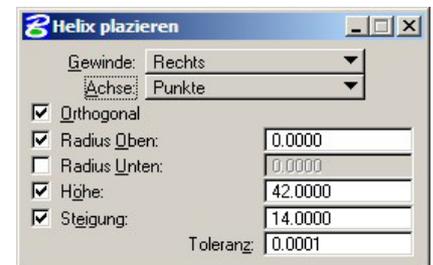
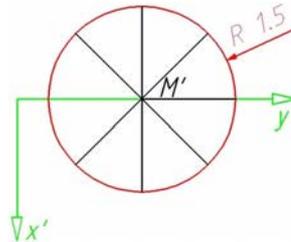
Das **Profil** ist kreisförmig und liegt in der Normalebene der Achse durch $(0/0/0)$, also in der xy -Ebene. Der Mittelpunkt sei im Punkt $(0/2/0)$ und der Radius beträgt 1,5 cm. Mit „Kreis platzieren“ (Hauptpalette, 4b ) zeichnen wir den Kreis.

Lösungsweg

Wir konstruieren Bahnhelispiralen von 8 Punkten des Profilkreises und lassen eine Flächenhaut darüber spannen.

Helispiralen

Um 8 Anfangspunkte der Helispiralen snappen zu können, platzieren wir als Erstes 4 Hilfslinien (Hauptpalette, 2b ) in der Profilebene (siehe Skizze).



Alle 8 Helispiralen lassen sich mit „Helix platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a ) mit den Einstellungen wie im Funktionskasten erzeugen. Damit müssen wir zum Platzieren der 8 Helispiralen jeweils folgende Punkte anklicken: „Mittelpunkt“ $(0/0/0)$, einen Anfangspunkt einer Helispirale und einen Punkt der Achse.

Helispiralfläche konstruieren

Mit Hilfe des Werkzeugs „Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a ) legen wir die Helispiralfläche über die Helispiralen. Wir stellen „Definieren über: Schnitt“ ein und klicken die Helispiralen entlang des Profils an. Da es sich um eine geschlossene Profilkurve handelt, klicken wir die als erste ausgewählte Kurve zum Schluss noch einmal an. Mit der linken Maustaste klicken wir in das Zeichenfenster um die Fläche zeichnen zu lassen. Durch erneutes Drücken der linken Maustaste wird das Ergebnis angenommen, sonst abgelehnt.**

Auf Volumenelement verdicken oder Umwandeln in Volumenelement

Da das Horn nicht nur eine dünne Haut ist, wandeln wir die gezeichnete Fläche zu einem Volumen um. Dazu klicken wir mit „3D umwandeln“ (Fläche modellieren, 1b ) die Fläche an.



** Sollte das Ergebnis nicht den Erwartungen entsprechen, kann das an den unterschiedlichen „Richtungen“ der Helispiralen liegen. Um die Richtungen zu kontrollieren bzw. zu ändern, verwendet man das Werkzeug „Elementrichtung ändern“ (B-Spline-Kurven, 1b )

Arbeitsblatt Muschel

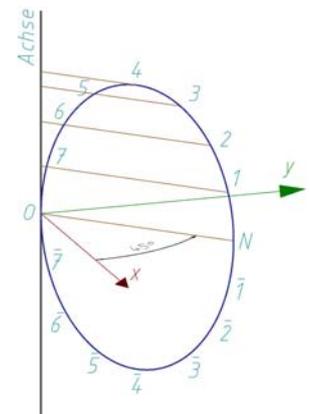
In einer Meridianebene liegt eine Ellipse, die unter einer Spiralung eine Muschel erzeugt. Die Muschel soll konstruiert werden.



Angabe

Spiralung: Das Spiralzentrum O liegt in $(0/0/0)$ und die Spiralachse ist die z -Achse. Mit „Linie platzieren“ stellen wir die Achse durch eine Gerade von $(0/0/-10)$ bis $(0/0/10)$ dar. Der Spiralparameter sei $p = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$. Die Muschel entsteht durch eine Spiralung mit Drehwinkel $\sigma = 360^\circ$.

Profilellipse: Wir legen die Ellipse in die yz -Ebene, wobei ein Nebenscheitel die Achse im Spiralzentrum O berührt. $a = 3,5$ cm, $b = 2,5$ cm sind die halben Achsenlängen. Wir stellen daher die Nebenachse durch eine Strecke von 5 cm dar. Mit „Ellipse platzieren“ (Hauptpalette, 4b ) snappen wir zuerst den Mittelpunkt dieser Strecke, dann den Nebenscheitel O und geben abschließend die halbe Hauptachsenlänge über AccuDraw ein. Für spätere Konstruktionsschritte „drehen“ (Hauptpalette, 8b ) wir die Ellipse um die Spiralachse um 45° .



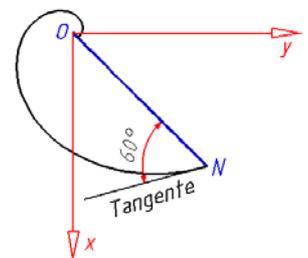
Lösungsweg

Wir konstruieren Bahnspiralen von Punkten der Ellipse und legen mittels „Über Schnitt konstruieren“ eine Fläche über die zylindro-konischen Spiralen. Die Punkte müssen auf der Ellipse regelmäßig verteilt sein. Mit „k“ stellen wir die Fangfunktion von AccuDraw auf 16 Zwischenpunkte und zeichnen parallel zur y -Achse Hilfsgeraden durch die Punkte 1 bis 4.

Die Bahnkurve des Nebenscheitels ist eine Logarithmische Spirale

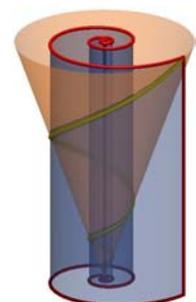
Die Tangente im Nebenscheitel N an die Spirale schließt mit dem Radialstrahl NO wegen der Formel $\cot \alpha = p$ den Winkel $\alpha = 60^\circ$ ein. Wir realisieren diese Tangente als Strecke.

Um die „Spirale zu platzieren“ (B-Spline-Kurven, 1a ) stellen wir „Typ“ auf „Logarithmus“. Der „Anfangsradius“ beträgt 5 cm, den „Endradius“ berechnen wir aus dem Anfangsradius: $r = r_0 \cdot e^{p\sigma}$, $\sigma = -2\pi$, $r = 5 \cdot e^{-0,577 \cdot 2\pi} = 0,132899$ und der „Winkel“ soll 360° sein. Für die Toleranz stellen wir den kleinstmöglichen Wert 0,0001 ein. Wir legen AccuDraw in die xy -Ebene und snappen den Anfangspunkt N , ein Punkten der Tangente durch N und einen Punkt, der festlegt auf welcher Seite der Tangente die Kurve liegt.



Konstruktion der zylindro-konischen Spirale durch 1

MicroStation hat keine eigene Funktion für zylindro-konische Spiralen. Daher konstruieren wir die Kurve als Schnitt eines lotrechten Zylinders (mit einer logarithmischen Spirale als Basis) mit einem Drehkegel mit Spitze in O .



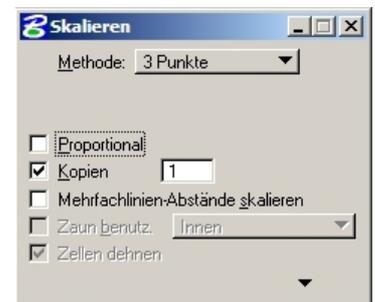
- Analog wie im Punkt N platzieren wir im Punkt 1 eine logarithmische Spirale. Dazu „messen“ (Hauptpalette, 7a ) wir den Normalabstand von 1 zur Achse („Anfangsradius“) und berechnen daraus den Endradius. Die Tangente in 1 ist parallel zu der in N .
- Wir „extrudieren“ (3D-Haupt, 1b ) die logarithmische Spirale entlang der Spiralachse zum lotrechten Zylinder.
- Der Normalenfußpunkt von 1 auf der Achse ist der Mittelpunkt des „Drehkegels“ (3D-Haupt, 1a ). 1 legt den Radius fest und O ist die Spitze.
- Mit , „Trimmung erstellen“ (Fläche modellieren, 1b) konstruieren wir die Schnittkurve von Zylinder und Kegel. Dazu klicken wir die Flächen nacheinander an.

Konstruktion weiterer zylindro-konischer Spiralen durch Skalierung

Die zylindro-konische Spirale durch 2 entsteht aus der Spirale durch 1 durch geeignetes „Skalieren“ (Hauptpalette, 8b ). Wir verwenden folgende Einstellungen:

- „Methode: 3 Punkte“,
- „Proportional“ deaktiviert und
- „Kopie“ aktiviert.

Nacheinander klicken wir die zylindro-konische Spirale durch 1 , das Spiralzentrum O , 1 und 2 an.



Für die zylindro-konischen Spiralen durch $3,4,\dots,7$ gehen wir analog vor.

Konstruktion weiterer zylindro-konischer Spiralen durch Spiegelung

Die Bahnspiralen von 1 bis 7 markieren wir mit STRG + , „Elementauswahl“. Wir spiegeln diese Spiralen mit dem Werkzeug „Spiegeln“ (Hauptpalette, 8b ) an der xy -Ebene.

Elementrichtung ändern und Kurven neu erstellen

Bevor wir die Muschel erzeugen, orientieren wir alle zylindro-konischen Spiralen mit „Elementrichtung ändern“ (B-Spline-Kurven, 1b ) gleich und lassen die „Kurven neu erstellen“ (B-Spline-Kurven, 1b ) das bedeutet, die zylindro-konische Spirale wird durch eine B-Spline-Kurve angenähert. Wir wählen den Typ „Neu erstellen“, wobei wir nur die „Toleranz“ aktivieren und im dazugehörigen Feld $0,0001$ eingeben, um die Abweichung der B-Spline-Kurve von der zylindro-konischen Spirale möglichst gering zu halten. Die zylindro-konischen Spiralen müssen mit „Kurven neu erstellen“ angeklickt werden und durch ein zweites Mal Klicken bestätigt werden.

Muschel erzeugen

Mit „Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren“ (Fläche modellieren, 1a ) klicken wir die zylindro-konischen Spiralen entlang der Ellipse an. Die als erste ausgewählte Spirale, klicken wir zum Schluss noch einmal an. Durch Drücken der rechten Maustaste beenden wir die Eingabe von Kurven und die Fläche wird erstellt.

Um realitätsnäher zu sein, verdicken wir die Fläche abschließend. , „Auf Volumenelement verdicken“ (3D-Haupt, 1b)



Werkzeugindex

<i>Werkzeug</i>	<i>Toolbox, Nr</i>	<i>Seite</i>
 „Komplexe Kette erstellen“	Hauptpalette, 6a	52
 „Bereich erstellen“	Hauptpalette, 6a	55
 „Skalieren“	Hauptpalette, 8b	92
 „Spiegeln“	Hauptpalette, 8b	94
 „Matrix konstruieren“	Hauptpalette, 8b	55
 „Extrudieren“	3D-Haupt, 1b	91
 „Entlang eines Pfades Extrudieren“	3D-Haupt, 1b	59
 „Auf Volumenelement verdicken“	3D-Haupt, 1b	60
 „B-Spline-Kurve platzieren“	B-Spline-Kurven, 1a	47
 „Spirale platzieren“	B-Spline-Kurven, 1a	90
 „Helix platzieren“	B-Spline-Kurven, 1a	44, 48
 „Kurve neu erstellen“	B-Spline-Kurven, 1a	94
 „Elementrichtung ändern“	B-Spline-Kurven, 1b	86
 „Fläche über Schnitt oder Netzwerk konstruieren“	Fläche modellieren, 1a	74, 75
 „Freiformfläche platzieren“	Fläche modellieren, 1a	77
 „An zwei Leitlinien extrudieren“	Fläche modellieren, 1a	72
 „Schraubfläche erstellen“	Fläche modellieren, 1a	48, 70
 „Trimmung erstellen“	Fläche modellieren, 1b	49
 „3D umwandeln“	Fläche modellieren, 1b	54
 „Flächen vereinigen“	Fläche modellieren, 1b	60
 „Krümmung analysieren“	Fläche modellieren, 2b	69
 „ACS definieren (durch Punkte)“	Hilfskoordinaten (ACS)	58

Literaturverzeichnis

- Brauner H. (1986), *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie*, Wien, Springer Verlag
- Dance S. Peter (2003, 2. Auflage), *Muscheln und Schnecken*, Berlin, Urania Verlag
- Farin G. (1990), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Boston, Academic Press
- Glaeser G./Stachel H. (1999), *Open Geometry. Open GL® + Advanced Geometry*, New York, Springer Verlag
- List C. (2004), *Konstruktive Behandlung von Regelflächen mit CAD-Software anhand ausgewählter Beispiele für den Schulunterricht*, Wien, TU
- Rath W. (2001), *Skriptum Geometrie für Informatiker*, Wien, TU
- Stachel H. (1998), *Skriptum Darstellende Geometrie 1*, Wien, TU
- Wunderlich W. (1966), *Darstellende Geometrie 1*, Mannheim, Hochschultaschenbuch-Verlag
- Wunderlich W. (1967), *Darstellende Geometrie 2*, Mannheim, Hochschultaschenbuch-Verlag
- *Mathematische Grundlagen von Freiformflächen:*
<http://www.brg4.ac.at/acg/unterlagen>, März 2004
- *MicroStation Version 8.1-Hilfe:* <http://docs.bentley.com>, Oktober 2003
- *Grafiti:* <http://olli.informatik.uni-oldenburg.de/Grafiti3>, Oktober 2003